Zusammenfassung An1I HS2012

Analysis für Informatiker 1

Emanuel Duss
emanuel.duss@gmail.com

19. November 2012

HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

FHO Fachhochschule Ostschweiz

Inhaltsverzeichnis

Emanuel Duss
http://emanuelduss.ch

1 Grundlagen der Lehre von den reellen Funktionen

1.1 Grundlagen

1.1.1 Definition von Funktionen

In der Mathematik ist eine Funktion definiert als eine eindeutige und unveränderliche Zuordnungsvorschrift, welche jeder Zahl aus einer gegebenen Menge $\mathbb{D}$ genau ein Element aus einer zweiten Menge $\mathbb{Z}$ zuordnet. Man schreibt:

$$f : \begin{cases} D & \to Z \\ \text{x} & \mapsto \text{Regel, um den Funktionswert von x zu bestimmen} \end{cases}$$

D: Definitionsbereich / Definitionsmenge von f; kurz $DB(f)$

x: Argumente des Definitionsbereichs

Funktionswert Dem Argument x zugeordnete Zahl. Wird bezeichnet als $f(x)$.

Zielmenge Mögliche Funktionswerte

Bild oder Wertebereich Werte aller Zahlen, was die Funktion auch tatsächlich ausspucken kann.

Nullstelle Argument, welches den Funktionswert 0 hat.

Graph Menge aller Punkte in der Ebene, deren zweite Koordinate der Funktionswert der ersten Koordinate ist: $Graph(f) = (x, y)|y = f(x)$

Funktionen sind nur indentisch, wenn der Term *und* die Definitionsmenge gleich sind! Beispiel:

$$f := \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ \text{x} & \mapsto \text{1, wenn die nächste ganze Zahl kleiner x gerade ist. Sonst 0} \end{cases}$$

- Definitionsbereich: $DB(f) = \mathbb{R}$
- Bild: $f(\mathbb{R}) = 0, 1$

Die dem Argument x zugeordnete Zahl heisst Funktionswert und man bezeichnet ihn mit $f(x)$.

1.1.2 Definition von Funktionen mit Hilfe von Termen

$f := x \mapsto \sqrt{2y}$ (oder nur : oder nur = oder beides; man kann aber auch w statt x verwenden.) Der Pfeil $\mapsto$ wird gelesen: 'geht über in': 'x geht über in $\sqrt{2y}$'.

Ersetzen einer Variable:

$$\left.\frac{2x^2y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right|_{x=2} = \frac{2(2^2)y}{\sqrt{2^2-y^2}}$$

1.1.3 Restriktionen

Der Definitionsbereich einer Funktion kann eingeschränkt werden:

$$sin_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$$

1.1.4 Äquivalenz und Implikation

Äquivalente Gleichungen oder Ungleichungen haben die exakt genau gleiche Lösungsmenge (kein Element mehr oder weniger!).

1.2 Spezielle Eigenschaften von Funktionen

1.2.1 Symmetrie und Periodizität

Umkehrbar Die Funktion ist umkehrbar, wenn jeder Y-Wert nur ein X-Wert hat.

Gerade Funktion Spiegelung an der Ordinate; $g(x) = g(-x)$

Ungerade Funktion Spiegelung ian der ersten Winkelhalbierenden; Geht immer durch den Ursprung! $u(x) = -u(-x)$

Periodizität Die Funktion wiederhohlt sich irgendwann wieder (z. B. $sin(x) = sin(x + 2\pi)$)

Injektiv Die Funktion ist wohldefiniert auf der Y-Achse

Surjektiv Die Zielmenge und das Bild sind identisch

Bijektiv Die Funktion ist Injektiv und Surjektiv gleichzeitig;. Die Umkehrfunktion ist automatisch wieder f.

1.3 Operationen mit Funktionen

1.3.1 Transformation von Funktionen

$$F := x \mapsto c \cdot f(a \cdot x + b) + d$$

- d: Verschiebung vertikal $\updownarrow$ um d (d < 0: nach unten; d > 0: nach oben)
- b: Verschiebung horizontal $\leftrightarrow$ um $|\frac{b}{a}|$ ($|\frac{b}{a}|$ < 0 nach rechts; $|\frac{b}{a}|$ > 0 nach links)
- c: Streckung (|c| > 1) oder Stauchung (|c| < 1);
  Ist c < 0, zusätzlich Spiegelung an der x-Achse
- a: Streckung (|a| < 1) oder Stauchung (|a| > 1)
  Ist a < 0, zusätzlich Spiegelung an der y-Achse
- $|x|$ spiegelt für x < 0 an der y-Achse
- $|f(x)|$ spiegelt die negativen Funktionswerte an der y-Achse

1.3.2 Verkettung von Funktionen

Verkettet man die Funktion

$$f : \begin{cases} A & \to B \\ \text{x} & \mapsto f(x) \end{cases}$$

mit

$$g : \begin{cases} C & \to D \\ \text{x} & \mapsto g(x) \end{cases}$$

erhält man ($\circ$ bedeutet 'nach')

$$g \circ f : \begin{cases} A & \to D \\ \text{x} & \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Mit der Abschlussbedingung: $B \subset C$ oder genauer: Bild(f) $\subset$ DB(g)

Regeln der Verkettung

- Klammern können weggelassen werden: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$
- Vertauschen darf man nicht: $f \circ g \neq g \circ f$

1.3.3 Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion von

$$f : \begin{cases} D & \to Z \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$$

ist

$$f^{-1} : \begin{cases} Z & \to D \\ y & \mapsto \text{die Zahl für die gilt f(x) = y} \end{cases}$$

Unter den Voraussetzungen, dass

- $f(x)$ muss injektiv sein, damit f^{-1} wohldefiniert ist
- $f(x)$ muss surjektiv sein (Z = Bild(f)), damit ist f^{-1} für Werte aus Z definiert.

// Die Umkehrfunktion der Zweierpotenz $sqr^{-1} = sqr_{[0;8]}$

Die Umkehrfunktion von $sin(x)$ ist $arcsin(x)$ (sin^{-1} wie ein anderes Symbol):

$$sin^{-1}(x) = arcsin(x) \neq \frac{1}{sin(x)}$$

1.4 Grenzwerte

1.4.1 Uneigentliche Grenzwerte

Wie wird x, wenn es gegen unendlich geht?

$$\lim_{x \to \infty} x$$

1.4.2 Eigentliche Grenzwerte

Wie wird x bei 2?

$$\lim_{x \to 2} x$$

2 Differenzialgleichungen

2.1 Grundbegriffe

2.1.1 Ableitung

Ist f eine reelle Funktion und x ein Argument. Wenn der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

im eigentlichen Sinne existiert, so heisst die Funktion f an der Stelle x differenzierbar und der Grenzwert heisst die Ableitung von f an der Stelle x.

Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x ist der relative Funktionswertzuwachs bezogen auf den Argumentzuwachs.

Wir berechnen die steigung (der anliegenden Tangente) für den Funktionswert x.

2.2 Ableitungsfunktionen

Das sind die wichtigsten Ableitungsfunktionen:

Funktion	**Ableitungsfunktion**
$x \mapsto 1$	$x \mapsto 0$
$id := x \mapsto x$	$x \mapsto 1$
$sqr := x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$
$rez := x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$sqrt := x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto e^{-x}$	$x \mapsto -e^{-x}$
$x \mapsto a^x$	$x \mapsto \ln(a) \cdot a^x$
$\ln$	$x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x > 0$
$\log_b(x)$	$\frac{1}{\ln(b) \cdot x}$
$\sin$	$\cos$
$\cos$	$-\sin$
$\tan$	$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$
$\arcsin$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan$	$\frac{1}{1+x^2}$

- Quadratfunktion: $sqr'(x) := x \rightarrow 2x$

2.3 Termschreibweise von Ableitungen

Die Ableitung der Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{x} & \mapsto x^2 \end{cases} \text{ ist } f' : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{x} & \mapsto 2x \end{cases}$$

Die Ableitungsfunktion wird in der Termschreibweise so dargestellt:

$$\frac{dx^2}{dx} = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

2.4 Linearisieren

2.5 Taylorentwicklung

3 tbd

3.0.1 Ungleichung

Es gelten folgende Regeln:

- Monoton steigende Funktion: Ungleichheitszeichen wechselt
- Monoton fallende FunktioN: Ungleichheitszeichen wechselt

Eine Ungleichung kann *allgemeingültig* sein:

$$x^2 > -4$$

Eine Ungleichung kann *unerfüllbar* sein:

$$x^2 < -4$$

Eine Ungleichung kann eine Lösung haben:

$$x^2 \leq -4$$

Die Lösungsmenge ist hier: $-2 \leq x \leq 2$.

3.1 Quadratisch Ergänzung

$$x^2 - 6x + 5$$
$$(x-3)^2 - 9 + 5$$

Literatur

[1] Analysis für Informatiker 1; Skript der HSR

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis