Zusammenfassung Math1I HS2012

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

Emanuel Duss
emanuel.duss@gmail.com

6. März 2013

HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

FHO Fachhochschule Ostschweiz

Inhaltsverzeichnis

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung und auf dem Skript von *Mathematische Grundlagen der Informatik 1* der HSR vom Herbstsemester 2012.

1 Aussagenlogik

1.1 Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, welcher entweder falsch oder wahr ist.

1.2 Junktoren

- $\neg$ Negation (nicht): Wahr, wenn die Aussage falsch ist.
- $\wedge$ Konjunktion (und): Wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.
- $\vee$ Disjunktion (oder): Wahr wenn eine der beiden Aussagen wahr ist.
- $\Rightarrow$ Implikation (wenn ... dann):
  - Beispiel: $A \Rightarrow B$
  - Wenn Aussage A gilt, dann gilt auch Aussage B.
  - Das heisst: Nur falsch, wenn A wahr und B falsch ist.
- $\Leftrightarrow$ Äquivalenz (genau dann, wenn ...)
  - Beispiel: $A \Leftrightarrow B$
  - Wahr, wenn A und B den gleichen Wahrheitswert besitzen.
- $\uparrow$ NAND (Zusammengesetzt aus NOT (nicht, $\neg$) und AND (und $\wedge$))
  - Alle Junktoren können durch das NAND ausgedrückt werden
  - Beispiel: $A \uparrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$ sowie $A \uparrow A \Leftrightarrow \neg A$
    sowie $A \wedge B \Leftrightarrow (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$ sowie $A \vee B \Leftrightarrow (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$

1.3 Wahrheitstabelle

		Nicht		Und	Oder	Implikation	Äquivalenz	NAND
A	B	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \uparrow B$
w	w	f	w	w	w	w	w	f
w	f	f	w	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	w	w	f	w
f	f	w	f	f	f	w	w	w

- In der Wahrheitstabelle gilt: w = wahr und f = falsch.
- Eine Aussage, die in jeder Zeile der Wahrheitstafel falsch ist, heisst Kontradiktion.

1.3.1 Beispiel

$\neg(\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(B \Rightarrow A)) \Rightarrow A \wedge B$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg 3$	$B \Rightarrow A$	$\neg 5$	$4 \Rightarrow 6$	$\neg 7$	$A \wedge B$	$8 \Rightarrow 9$
w	w	w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f	f	w
f	f	w	f	w	f	w	f	f	w

1.4 Hinreichend und notwendig

Die Implikation $A \Rightarrow B$ bedeutet:

- Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr. A ist eine *hinreichende* Bedingung für B.
- A kann nicht wahr sein, wenn B falsch ist. B ist eine *notwendige* Bedingung für A.

1.5 Aussagenlogische Formeln

Kommutativität $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

Assoziativität $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ und $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

Distributivität $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
und $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Satz de Morgan $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ und $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Aufeinanderfolgende Implikationen Wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$
kann man auch schreiben $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.

Verschmelzungsgesetz $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ und $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

Bei der Elimination von Klammern sind dies die Prioritäten:

1. Klammern $((\ldots), [\ldots], \{\ldots\})$
2. Negation $(\neg)$
3. Konjunktion $(\wedge)$ und Disjunktion $(\vee)$
4. Implikation $(\Rightarrow)$ und Äquivalenz $(\Leftrightarrow)$

1.6 Normalform

Eine Vollkonjunktion ist ein boolescher Ausdruck, in dem alle Variablen genau einmal vorkommen und durch $\wedge$ (konjunktiv) oder $\vee$ (disjunktiv) verbunden sind. Dabei dürfen die Variablen auch negiert auftreten. Das wird an folgendem Beispiel gezeigt:

X	Y	Z	C
w	w	w	f
w	w	f	f
w	f	w	w
w	f	f	w
f	w	w	w
f	w	f	w
f	f	w	f
f	f	f	w

1.6.1 Negationsnormalform

Bei der Negationsnormalform dürfen Negationen ($\neg$) nur direkt vor einer Variable (und nicht vor einer Klammer) stehen:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

1.6.2 Verallgemeinerte Konjunktion

Alle Variablen werden mit der Konjunktion ($\wedge$) verbunden. Die einzelnen Variablen liegen dabei immer in der Negationsnormalform vor:

$$X \wedge \neg Y \wedge Z$$

1.6.3 Disjunktive Normalform

Die disjunktive Normalform ist eine Verbindung der verallgemeinerten Konjunktionen mit einer Disjunktion ($\vee$). **Dabei werden die wahren Werte der Wahrheitstabelle ausgewertet.**

$$(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$$

1.6.4 Verallgemeinerte Disjunktion

Alle Variablen werden mit der Disjunktion ($\vee$) verbunden. Die einzelnen Variablen liegen dabei immer in der Negationsnormalform vor:

$$X \vee \neg Y \vee Z$$

1.6.5 Konjunktive Normalform

Die konjunktive Normalform ist eine Verbindung von verallgemeinerten Disjunktion mit einer Konjunktion ($\wedge$). **Dabei werden die falschen Werte der Wahrheitstabelle ausgewertet.**

$$A \Leftrightarrow \neg(X \wedge Y \wedge Z) \wedge \neg(X \wedge Y \wedge \neg Z) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)$$

Daraus macht man noch die Negationsnormalform (mit dem Satz de Morgan):

$$A \Leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z)$$

Jetzt hat man in den Klammern die verallgemeinerte Disjunktion und A liegt in der konjunktiven Normalform vor.

1.7 Aussageformen und Prädikate

- Der Wahrheitswert einer Aussageform hängt von einer oder mehreren Variablen ab.
- Aussageformen sind unbestimmt, weil nicht klar ist, welcher Wert für eine Variable eingesetzt wird.
- Der Wert, welcher für eine Aussageform eingesetzt wird, heisst Subjekt.
- Ein Subjekt kann zulässig (Aussage ist wahr oder falsch) oder unzulässig (Aussage ist nicht auswertbar) sein.
- Aussagen und Aussageformen bestehen aus dem Subjekt (Variable) und dem Prädikat (Beschreibung, Eigenschaft).

1.8 Quantoren

- Der Allquantor ($\forall$) sagt, dass eine Aussage für alle Elemente gelten soll.
- Der Existenzquantor ($\exists$) sagt, dass eine Aussage für mindestens ein Element gelten soll.
- Gibt es einen Quantor, sind die Variablen nicht mehr frei wählbar, sondern an den Quantor gebunden.

Das wird an folgendem Beispiel erläutert:

$$R(x) : \text{Der Weg } x \text{ aus der Menge } W \text{ aller Wege führt nach Rom.}$$

- Alle Wege führen nach Rom: $\forall x \in W : R(x)$
- Nicht alle Wege führen nach Rom: $\neg\forall x \in W : R(x) \Leftrightarrow \exists x \in W : \neg R(x)$
- Kein Weg führt nach Rom: $\neg\exists x \in W : R(x)$
- Alle Wege führen nicht nach Rom: $\forall x \in W : \neg R(x)$

Wenn nicht alle Wege nach Rom führen, gibt es mindestens einen Weg, der Nicht nach Rom führt:

$$\neg(\forall x \in W : R(x)) \Leftrightarrow \exists x \in W : \neg R(x)$$

Man kann aber nichts darüber aussagen, ob überhaupt ein Weg nach Rom führt.

1.9 Natürliche Zahlen

Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger (ausser der Null). Wir können die Nachfolger von n mit $s(n)$ darstellen:

$$0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots$$

Das kann später noch nützlich sein.

2 Beweisen

2.1 Allgemeine Beweistechniken

Wir haben folgende Voraussetzung:

$$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$$

Folgende Behauptung soll geprüft werden:

$$a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$$

Dabei ist

$$A : a^2 < b^2 \text{ und } B : a < b \text{ und } C : (A \Rightarrow B)$$

2.1.1 Direkter Beweis

Behauptung wird anhand allgemein geltenden Grundlagen abgeleitet und man versucht die Aussage $A(n) \Rightarrow B(n)$ direkt zu zeigen. Ist

$$a^2 < b^2$$

, dann ist

$$0 < b^2 - a^2$$

was

$$0 < (b + a)(b - a) \Rightarrow b > a$$

bedeutet.

2.1.2 Indirekter Beweis

Um zu zeigen 'wenn A, dann B' gilt, können wir auch sagen 'wenn nicht b, dann auch nicht a'.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

2.2 Vollständige Induktion

Folgende Formel ist zu beweisen:

$$S(n) : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$$

2.2.1 Induktionsanfang / Induktionsverankerung

Man prüft die Formel für die erste Zahl der Reihe. In unserem Fall ist das $n = 1$:

$$n = 1 : \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$$

Die Summenformel gilt also für n = 1.

2.2.2 Induktionsschritt

a) Induktionsannahme
Das ist die ursprüngliche Formel:
$S(n) : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

b) Induktionsbehauptung
Man geht davon aus, dass die Formel auch für die darauf folgende Zahl gilt. Deshalb erhöht man n überall um 1:

$$S(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

(Quasi `s/n/n+1/g`)
Die Induktionsbehauptung ist jetzt mit dem Induktionsbeweis zu beweisen.

c) Induktionsbeweis
Dann muss man die linke Seite der Induktionsbehauptung nehmen und in zwei Summen Teilen, damit man die Induktionsannahme einsetzen kann:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + n + 1$$

Das $n+1$ auf der Rechten Seite kommt vom linken Summenzeichen. Das $n+1$, bedeutet noch ein k (von der nächsten Zahl) dazu addieren.

Dann setzt man die Induktionsannahme beim Summenzeichen nach dem Gleichheitszeichen ein:
$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + (n+1)$

Multiplizieren und $\frac{1}{2}$ ausklammern:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n + 2n + 2) = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + 3n + 2)$$

Klammern als Produkt schreiben:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Somit ist man wieder bei der gleichen Formeln der Induktionsbehauptung.

2.3 Rekursionen

Eine Reihe ist eine Summe von Folgegliedern ($1 + 2 + 3 + ...$). Eine Folge ist eine Menge von Zahlen, in spezieller Reihenfolge:

$$(a_k)_{k...n} := (a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n)$$

$$\Rightarrow (a_k)_{n \in \mathbb{N}} := (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$$

2.3.1 Direkte Angabe

Man kann für jedes Folgeglied angeben, wie es berechnet wird:

$$a_n = 2^n$$

$$a_1 = 2; a_2 = 4; a_3 = 8, ...$$

2.3.2 Rekursive Angabe

Man gibt das erste Folgeglied an, sowie eine Rekursionsformel, wie man das nächste Glied berechnet.

$$a_0 = 1 \text{ und } a_n = a_{n-1} \cdot 2$$

$$\Rightarrow a_1 = 2; a_2 = 4; a_3 = 8, ...$$

3 Mengen, Relationen, Abbildungen

3.1 Mengen, Teilmengen, Potenzmengen

- Mengen: $\{5, 23, 42\}$ oder $\{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$ oder $\{x \in \mathbb{N} | x^2 = 1\}$
- Teilmenge/Inklusion: A ist Teilmenge von B: $A \subset B$ (Ganz A ist enthalten in B)
- **Leere Menge: $\emptyset$ oder $\{\}$ (Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge!)**
- Mächtigkeit oder Kardinalität $|M|$: Anzahl der Elemente: Ist $M = \{a, b, c\}$, dann ist $|M| = 3$
- Potenzmenge $P(M)$: Menge aller Teilmengen von einer Menge M:
  Die Kardinalität der Potenzmenge ist zwei hoch der Kardinalität der Ausgangsmenge: Ist die Menge $M = \{a, b\}$, dann ist die Potenzmenge $P(M) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ $(|P(M)| = 2^2 = 4)$

3.2 Vereinigung und Durchschnitt

3.2.1 Schreibweise

- Vereinigung: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- Durchschnitt / Schnittmenge: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$
- Differenz: $A \backslash B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$
- Komplement: $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$

3.2.2 Gesetze

Idempotenzgesetz $A \cup A = A$ und $A \cap A = A$

Kommutativität $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$

Assoziativität $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
und $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$

Distributivität $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Verschmelzungsgesetz $A \cup (A \cap B) = A$ und $A \cap (A \cup B) = A$

Kürzen $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = B$ und $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$

Zusammenhang der Inklusion/Teilmenge mit der Vereinigung und Durchschnitt:

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \cap B) = A \Leftrightarrow (A \cup B) = B$$

$$A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

3.3 Komplement und Differenz

Das Komplement kann man mit der Menge A und B und der Obermenge M beschreiben:

$$\overline{A} = \{x \in M | x \notin A\}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$A \cap \overline{A \cup B \cup C} = A \cap (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{C}) = \{\}$$

Bei der Differenz gilt folgendes:

$$A \backslash B = \{a \in A | a \notin B\}$$

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}$$

$$A \backslash (A \backslash B) = A \backslash (A \cap \overline{B}) = A \cap (\overline{A \cap \overline{B}}) = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \{\}$$

3.4 Venn-Diagramm

In einem Venn-Diagramm können die Mengen grafisch dargestellt werden.

3.5 Kartesische Produkte

Im Gegensatz zu den Mengen spielt bei den Kartesischen Produkten die Reihenfolge der Elemente eine Rolle.

Ein geordnetes Paar nennt sich auch 2-Tupel und ist wie folgt definiert:

$$(a, b) = (a_0, b_0) \Leftrightarrow a = a_0 \text{ und } b = b_0$$

Das Kartesische Produkt von zwei Mengen A und B wird definiert als Menge aller geordneten Paare, deren erste Komponente aus der Menge A stammt und die zweite Komponente aus der Menge B:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Dasselbe gilt auch für Kartesische Produkte mit drei Faktoren:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) | a \in A, b \in B, c \in C\}$$

Dasselbe gilt auch für Kartesische Produkte mit beliebig vielen Faktoren:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in A_i \text{ für } i = 1, ..., n\}$$

Sind alle Faktoren gleich, kann man die Potenzschreibweise verwenden:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{\text{n Faktoren}}$$

3.6 Relationen

Eine n-stellige Relation R zwischen den nichtleeren Mengen $A_1, A_2, ..., A_n$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes A.

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_i \times A_i \times ... \times A_i$$

$$R \subset A = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

3.7 Abbildungen

- Injektiv: *Jedem* Element der Definitionsmenge wird ein *anderes* Element der Zielmenge zugeordnet.
- Surjektiv: *Jedem* Element der Definitionsmenge wird ein Element der Zielmenge zugeordnet und alle Elemente der Zielmenge werden mindestens einmal erreicht.
- Bijektiv (Injektiv und Surjektiv): *Jedem* Element der Definitionsmenge wird ein *anderes* Element der Zielmenge zugeordnet und alle Elemente der Zielmenge werden erreicht.

3.8 Mächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen A und B heissen gleich mächtig, wenn es eine bijektive Abbildung von A nach B gibt.

4 Vektoren und Vektorräume

4.1 Begriffe

4.1.1 Vektoren

Einen n-Tupel $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ aus dem $\mathbb{R}^n$ kann als Vektor dargestellt werden:

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

4.1.2 Vektoren aus zwei Punkten berechnen

Der Vektor von Punkt $Q = (3, 0)$ bis $P = (-1, 3)$ berechnet sich so:

$$\overline{QP} = \begin{pmatrix} P_1 - Q_1 \\ P_2 - Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 0 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4.1.3 Matrix, Matrizen

Eine $n \times m$ Matrix oder eine Matrix vom Typ (n, m) hat n Zeilen und m Spalten, wird mit einem Grossbuchstaben beschrieben und sieht so aus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Die Zahlen heissen Koeffizienten und werden mit zwei Indizes geschrieben. Der erste ist der Zeilenindex (n), der zweite ist der Spaltenindex (m).

Quadratische Matrix: Eine Matrix ist quadratisch, wenn $n = m$ ist. Die quadratische Matrix hat also gleich viele Spalten wie Zeilen:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix: Eine Diagonalmatrix ist quadratisch und zudem alle Koeffizienten 0 ausser die Diagonale:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix: Eine Einheitsmatrix ist eine Diagonalmatrix, welche aus lauter 1 besteht:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrix: Eine (obere) Dreiecksmatrix ist eine Diagonalmatrix, in welcher oberhalb der Diagonale nicht aus Nullen besteht:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1.4 Rang

Anzahl Zeilen der Matrix A, die bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit dem Gauss-Algorithmus nicht zu Nullzeilen werden. Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat also den Rang 2.

4.1.5 Dimension

Die Anzahl der Elemente einer Basis heisst die Dimension des Vektorraums, kurz $\dim(V)$. Die Elemente der Basis werden gebraucht, um den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems zu bestimmen (die **linear abhängigen** Vektoren durch die **linear unabhängignen** Vektoren berechnen).

$$\dim(\text{Lös}(A, \vec{0})) = n - Rg(A)$$

n steht für Anzahl Unbekannte.

4.1.6 Linearkombination

- Alle Linearkombinationen einer Menge von Vektoren bilden einen Vektorraum
- Aus einem linear unabhängigen Erzeugendensystem lässt sich kein Vektor weglassen, ohne den erzeugten Vektorraum zu verkleinern
- Einige Vektoren (linear abhängige) lassen sich als Linearkombinationen von anderen Vektoren darstellen

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Polynome $q_1 = x^2 + 1$, $q_2 = x^2 + x + 2$ und $q_3 = x + 2$ als Linearkombination von 1, x und x^2 darstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist $1 = q_1 - q_2 + q_3$, $x = -2q_1 + 2q_2 - q_3$ und $x^2 = q_2 - q_3$.

Jetzt kann man auch das Polynom $p = 7x^2 - x - 2$ als Linearkombination von q_1, q_2 und q_3 darstellen: $p = 7(q_2 - q_3) - (-2q_1 + 2q_2 - q_3) - 2 \cdot (q_3 - q_2 + q_1)$

4.1.7 Lineare Abhängigkeit

Vektoren sind linear unabhängig, wenn keiner der Vektoren sich als Linearkombination der jeweils anderen Vektoren darstellen lässt (sie dürfen also z. B. nicht in die selbe Richtung zeigen.)

Das heisst, dass Vektoren linear unabhängig sind, wenn aus $\lambda_1 \cdot \vec{v_1} + \lambda_2 \cdot \vec{v_2} + ... + \lambda_n \cdot \vec{v_n} = \vec{0}$ folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$

Wenn es nach der Gauss-Elimination Nullzeilen gibt, sind die Vektoren linear abhängig (= nicht linear unabhängig). **Es gibt nur so viele linear unabhängige Vektoren, wie es keine**

Nullzeilen gibt (=Rang):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die fünf Vektoren (= Spalten der Matrix) sind linear abhängig
- $\mathrm{Rg}(M) = 2$ (Nur zwei der fünf Vektoren sind linear unabhängig)
- $\dim(M) = 3$

$$x_1 = x_3 - x_5$$
$$x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 4x_5$$

Die Komponenten x_3, x_4 und x_5 werden gewählt und erhält:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.1.8 Erzeugendensystem

Ein Erzeugendensystem E spannt eine Ebene / einen Raum der Dimension n auf:

$$E = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$$

Die Vektoren $\vec{v_1}$ bis $\vec{v_n}$ müssen nicht zwingend linear unabhängig sein.

4.1.9 Basis

Eine Basis B ist eine Menge von linear unabhängigen Vektoren $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}\}$, welche einen Vektorraum V aufspannen. Jeder Vektor $\vec{x} \in V$ besitzt eindeutige Koordinaten $x_1, x_2, ..., x_n$ bezüglich der Basis B. Das heisst $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{b_1} + x_2 \cdot \vec{b_2} + ... + x_n \cdot \vec{b_n}$ ist eindeutig. Die Vektoren $\vec{v_1}$ bis $\vec{v_n}$ sind zwingend linear unabhängig. Keiner der Vektoren ist also ein Vielfaches eines anderen Vektoren.

Rausfinden ob Polynome eine Basis bilden: Polynome als Matrix schreiben und mit dem Gauss-Algorithmus auf Stufenform bringen. Sind diese linear unabhängig (keine Nullzeile), bilden die Polynome eine Basis des Vektorraums.

4.1.10 Einheitsbasis

Da es unendlich viele Basen eines Vektorraums gibt, hat man die Einheitsbasis $B_E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$ definiert. Die Einheitsbasis / Normalbasis / kanonische Basis besteht aus Einheitsvektoren, die linear unabhängig sind:

$$B_E = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Daraus erkennt man, dass der Betrag $|\vec{e_i}|$ immer 1 ist.
- Beim Skalarprodukt von zwei Einheitsvektoren der Normalbasis gilt

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \vec{e_i} \neq \vec{e_j} \\ 1 & \text{wenn } \vec{e_i} = \vec{e_j} \end{cases}$$

4.2 Rechnen mit Vektoren

Vektoren können addiert werden:

$$\vec{x}_n + \vec{y}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Vektoren können multipliziert werden:

$$23 \cdot \vec{x} = 23 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \cdot x_1 \\ 23 \cdot x_2 \\ \vdots \\ 23 \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Der Definitionsbereich wird mit $\vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$ angegeben.

4.2.1 Weitere Rechenregeln für Vektoren

- $\vec{0}$ ist das neutrale Element: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

- $-\vec{v}$ ist das inverse Element: $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$
- Es gilt die Assoziativität: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Es gilt die Kommutativität: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Man kann Skalarkörper (s) ausmultiplizieren oder ausklammern: $s(\vec{u} + \vec{v}) = s \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

4.2.2 Matrix mal Vektor

Eine Matrix kann mit einem Vektor multipliziert werden (Zeile der Matrix · Spalte vom Vektor):

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Zudem gilt folgendes Gesetz:

$$A \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = A \cdot \vec{v} + A \cdot \vec{w}$$

4.3 Lineare Gleichungssysteme

4.3.1 Begriffe

- Ein lineares Gleichungssystem ist homogen, wenn die rechte Seite für alle Gleichungen $= 0$ ist.
- Ein lineares Gleichungssystem ist inhomogen, wenn die rechte Seite nicht immer $= 0$ ist. Spezielle Lösung = Rückwärts einsetzen; allgemeine Lösung = Rechte Seite gleich Null.

4.3.2 Erweiterte Koeffizientenmatrix

Das (inhomogene) Gleichungssystem

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \tag{1}$$
$$-1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \tag{2}$$
$$3x_1 - x_3 = 3 \tag{3}$$

kann auch als erweiterte Koeffizientenmatrix geschrieben werden:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

4.3.3 Gauss-Algorithmus / Gauss-Elimination

Mit der Gauss-Elimination macht man die Zahlen links unter der Diagonale der erweiterten Koeffizientenmatrix zu Nullen. Dabei darf man folgende Aktionen durchführen:

- Zeilen vertauschen: gibt keine Probleme
- Spalten vertauschen: ok, **aber beim Lösungsvektor wieder zurücktauschen!**
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar
- Addition einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

Nach den Umformungen kann das so aussehen:

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Durch rückwärts Einsetzen kann man jetzt *eine* Lösung bestimmen: x_3 sieht man in der untersten Zeile, also ist $x_3 = 0$. Jetzt setzt man x_3 in der zweiten Zeile ein, das ergibt $x_2 = 2$. Dasselbe macht man für x_1 und man erhält folgenden Vektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setzt man diese Lösung ins erste Gleichungssystem ein, sieht man, dass es mit diesen Lösungen funktioniert. Die Lösung ist auch für alle Vielfachen der Lösung gültig.

4.3.4 Lösungsmengen

Ein Gleichungssystem kann keine Lösung haben:

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{4}$$
$$x_1 + x_2 = 2 \tag{5}$$

Oder unendlich viele:

$$x_1 + x_2 = 2$$

Dabei ist die Lösungsmenge für $x_1 = t$ und $x_2 = 2 - t$.

Ist die letzte Zeile eine Nullzeile, gibt es auch unendlich viele Lösungen:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Eine spezielle Lösung gibt es durch Rückwärtseinsetzen mit $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow = 1$. Das ist der Aufhänger:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich dadurch, dass man die rechte Seite gleich Null setzt:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die dritte Zeile ist eine Nullzeile. Die zweite Zeile heisst $3x_2 + 4x_3 = 0$. Das hat unendlich viele Lösungen, z. B. $x_2 = 4$ und $x_3 = -3$. Dann folgt aus der ersten Zeile wegen $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$, dass $x_1 = -1$ ist. Eine Lösung des homogenen Systems ist also:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems ergeben sich als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems plus alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems:

$$\text{Lösung}(A, \vec{b}) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Lösung} = \text{Spezielle Lösung} + \lambda \cdot \text{ allgemeine Lösung}, \lambda \in \mathbb{R}$$

4.3.5 Lösen eines inhomogenen Gleichungssystems

Inhomogene Gleichungssysteme haben die rechte Seite immer $\neq 0$ und besitzen eine spezielle und eine allgemeine Lösung.

Das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 = 4 \quad (6)$$
$$2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = -5 \quad (7)$$
$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = -1 \quad (8)$$

ergibt die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach der Gauss-Elimination hat man folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher ist $x_3 = 0$. Somit ist $x_2 = 13$ und $x_1 = 4 - 13 = -9$. Das ist die spezielle Lösung.

Die allgemeine Lösung erhält man, wenn man $x_3 = 1$ und die rechte Seite überall auf 0 setzt. Dann bekommt man $x_2 = -7$ und $x_3 = 4$.

Die Lösungsmenge ist schlussendlich:

$$\text{Lösung}(A, \vec{b}) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Lösung} = \text{Spezielle Lösung} + \lambda \cdot \text{ allgemeine Lösung}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Wichtig: Hat man mehrere Nullzeilen, so muss für jede Nullzeile das entsprechende x_n auf 1 (und das andere auf 0) gesetzt werden und die Lösungsmenge erweitert sich dann um einen Faktor mal die allgemeine Lösung von diesem x_n.

4.4 Geraden und Ebenen

4.5 Definition

Die Gerade

$$G : \vec{p} = \vec{a} + s \cdot \vec{r}$$

ist definiert durch den Aufhänger $\vec{a}$, den Skalar/Parameter s und den Richtungsvektor $\vec{r}$.

4.5.1 Punkt auf Gerade

Um zu prüfen, ob ein Punkt B auf einer Geraden g liegt, setzt man die Gerade g mit dem Punkt B gleich und löst das Gleichungssystem.

4.5.2 Schnittpunkt zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$

Um den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 im $\mathbb{R}^3$ festzustellen, setzt man diese gleich. Die Geraden heissen:

$$g_1 : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jetzt setzt man die zwei Geraden gleich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Aufhänger kann man addieren und auf die rechte Seite nehmen. Die Richtungsvektoren kommen auf die linke Seite.

$$s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt das Gleichungssystem **(Vorsicht mit den Vorzeichen!)**, welches man lösen kann:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Da in der ersten Spalte s und in der zweiten Spalte t ist (da das Gleichungssystem so aufgestellt wurde), kommt man auf $t = 2$ und $s = -1$. Jetzt kann man s oder t in g_1 bzw. g_2 einsetzen und man erhält den Schnittpunkt $S = (-4, 3, 1)$.

Ist das Gleichungssystem nicht lösbar ($\text{Rang}(A, \vec{b}) > \text{Rang}(A)$), gibt es keinen Schnittpunkt. Die Geraden sind dann *windschief*.

4.6 Norm und Skalarprodukt

4.6.1 Betrag eines Vektors (Länge)

Der Betrag eines Vektors, also die Länge, rechnet sich wie folgt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2}$$

Der Betrag vom Vektor $\vec{u}$ aus dem $\mathbb{R}^3$ ist also:

$$|\vec{u}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

Der Abstand zweier Vektoren ist der Betrag der Differenz der beiden Vektoren. Der Abstand zwischen

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ ist } |\vec{u} + \vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Bei den Beträgen gelten folgende Rechenregeln:

- Ist der Betrag eines Vektors 0, ist der Vektor der Nullvektor: $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- $|r \cdot \vec{v}| = |r| \cdot |\vec{v}|$
- Dreiecksungleichung: $|\vec{v_1} + \vec{v_2}| \leq |\vec{v_1}| + |\vec{v_2}|$

4.6.2 Normalenvektor

Ein Normalenvektor ist ein Vektor, der **senkrecht** (orthogonal) auf einem Vektor, einer Geraden, einer Kurve, einer Fläche oder einer Ebene steht. Meistens wird der Normalenvektor zu einer Ebene gesucht. Für einen Normalenvektor ist einzig die Richtung entscheidend, daher gibt es jeweils beliebig viele Lösungen.
Das Skalarprodukt zwischen dem Vektor $\vec{v}$ und dem Normalenvektor $\vec{n_v}$ ist gleich 0.
Der Normalenvektor zu einem Vektor:

$$\text{aus } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ergibt sich } \vec{n_v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trick: v_1 und v_2 auf vertauschen und eines davon mit -1 multiplizieren. Die restlichen v_n auf Null setzen!
Der Normalenvektor zu einer Ebene (Ebene ist in Parameterform):

$$E : \vec{v} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor: } \vec{n_v} = \vec{r_1} \cdot \vec{r_2}$$

4.6.3 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist das Produkt der Beträge zweier Vektoren mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Man erhält eine reelle Zahl.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\phi)$$

Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ kann auch anders berechnet werden (ohne Kosinus):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i$$

Das Skalarprodukt von den beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus dem $\mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ist also

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) = 0$$

Ist das Skalarprodukt $= 0$, stehen die Vektoren senkrecht zueinander!

Der Winkel der beiden Vektoren lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$\phi := \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

Ist $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, so ist $\cos(\phi) = 1$ und somit der Winkel $\phi = 0$. Diese Vektoren nennt man *kollinear*.

Beim Skalarprodukt gelten folgende Rechenregeln:

- Grösser gleich Null: $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$

- Nullvektor: Ist $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$, dann ist $\vec{v} = \vec{0}$
- Assoziativität ($r \in \mathbb{R}$): $(r \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = r \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- Distributivität: $(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \cdot \vec{v} = \vec{u_1} \cdot \vec{v} + \vec{u_2} \cdot \vec{v}$
- Kommutativität: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

4.7 Normalenform der Geraden / Ebenen

Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht senkrecht zu einer Gerade g. Da das Skalarprodukt bei zwei senkrecht stehenden Vektoren 0 ist, kann man die Gerade zu einem Normalenvektor berechnen:

Ist der Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann gibt es aus folgender *Normalenform* eine lineare Gleichung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{Normalenform} = \underbrace{-x_1 + x_2}_{lineareGleichung} = 0$$

Somit ist die Gerade $x_1 = x_2$.

Wir haben eine Gerade g mit dem Normalenvektor $\vec{n}$. Die Lage der Gerade wird mit einem Ortsvektor $\vec{a}$ („Aufhänger“) festgelegt. Zudem haben wir einen Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{r}$. Es gilt nun: $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) = 0$.

4.7.1 Richtungsvektor einer Gerade

Der Richtungsvektor zweier Punkte ergibt sich aus deren Differenz:

$$\vec{r_p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{r_q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{r_q} - \vec{r_p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.7.2 Normalenform im $\mathbb{R}^2$

4.7.3 Ebene aus 3 Punkten

$$A = (1, 2, 4), B = (1, -1, 1), C = (0, 1, 3)$$

ARBASCA Formel

$$E : \vec{x} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}} + \overset{R}{\lambda\cdot} \overset{B-A}{\begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-2 \\ 1-4 \end{pmatrix}} + \overset{S}{\mu\cdot} \overset{C-A}{\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-2 \\ 3-4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.7.4 Punktrichtungsform in Normalenform

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt bestimmen (mit Haus von Niklaus):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -3 & -1 \\ -3 & -1 \\ 0 & -1 \\ -3 & -1 \end{array} \begin{array}{r} \\ \\ = -3\cdot(-1) - (-3)\cdot(-1) = 0 \\ -3\cdot(-1) - 0\cdot(-1) = 3 \\ 0\cdot(-1) - (-3)\cdot(-1) = -3 \end{array}$$

Normalenform:

$$E : (\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

4.7.5 Koordinatenform zu Normalenform

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 7 = 0$$

4.7.6 Hessesche Normalenform

Die Hessesche Normalenform erhält man, wenn man die Normalengleichung $\vec{n} \cdot \vec{r} - b = 0$ durch den Betrag des Normalenvektors $|\vec{n}|$ teilt. Mit den Definitionen $\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ und $b_0 = \frac{b}{|\vec{n}|}$ ergibt sich die Form:

$$\vec{n_0} \cdot \vec{r} - b_0 = 0$$

Berechnung $P(-1,3)$ und $Q(3,0)$

1. Normalenvektor bestimmen

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{r_P} - \vec{r_Q}) &= 0 \quad \Rightarrow \quad & \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \\ & & -4n_x + 3n_y &= 0 \\ & & \vec{n} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Parameter b in Normalenform berechnen

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{r_q} - b &= 0 \quad \Rightarrow \quad & \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} &= b \\ b &= 9 \quad \Rightarrow \quad & \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 9 &= 0 \end{aligned}$$

3. Betrag Normalenvektor berechnen

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

4. Hessesche Normalenform

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \frac{9}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1.8 = 0$$

Abstände Um den Abstand zu einem Punkt zu berechnen, setzt man den Punkt für $\vec{x}$ in die HNF ein:

$$Punkt(2,2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 1.8 = (1.2 + 1.6) - 1.8 = 1$$

4.8 Ebene

4.8.1 Parameterform

$$E : \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor bestimmen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 = x_3 = 1$ und $x_1 = 1$ Somit ist der Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.8.2 Koordinatengleichung einer Ebene

$$E : 2x + y + 2z = 4$$

Die Koeffizienten können als Normalenvektor geschrieben werden um die Normalenform zu bilden:

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} - 4 = 0$$

Die Achsenabschnitte ergeben sich, indem man die Koordinatengleichung $= 1$ setzt:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 1$$

Der Nenner gibt den Schnittpunkt der Ebene an (z. B.: x = (2/0/0).

4.8.3 Normalenform

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} - 4 = 0$$

In Parameterform umwandeln:

- Koordinatenform aufstellen
- Spezeile Lösung = Aufhänger
- Allgemeine Lösung (da es eine Ebene ist, braucht es zwei linear unabhängige Richtungsvektoren)
- Einmal mit $y = 1 \land z = 0$
- Einmal mit $y = 0 \land z = 1$

4.8.4 Hessesche Normalenform

Aus der Normalenform

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} - 4 = 0$$

bestimmt man den Betrag des Normalenvektors $\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. Hessesche Normalenform:

$$E: \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{4}{3} = 0$$

Jetzt kann man bei $\vec{x}$ ein Ortsvektor einsetzen und damit den Abstand dazu bestimmen.

4.8.5 Ebene bestimmen

- Parallel durch Ursprung: bei $\vec{x} = \vec{0}$ einsetzen und b bestimmen
- Im Abstand 2 vom Ursprung: In Hessesche Normalform Ursprung einsetzen und $= 2$ stellen; Auflösen.
- Parallel durch Punkt P: bei $\vec{x} = \vec{r_b}$ einsetzen und b bestimmen

4.9 Basen und Koordinaten

Im Erzeugendensystem $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{v_1} + \lambda_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{v_n}$ erzeugen $\vec{v_1}$ bis $\vec{v_n}$ ein Vektorraum.

5 Matrizen

5.1 Rechenregeln für Matrizen

5.1.1 Addition

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5.1.2 Multiplikation mit einem Skalar

Eine Matrix A kann mit einem Skalar k multipliziert werden. Dabei ist $k \in \mathbb{R}$.

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1m} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & k \cdot a_{n2} & \dots & k \cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

Beispiel (für $k \in \mathbb{R}$):

$$k \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5.1.3 Matrix-Multiplikation

Wir haben die Matrix A und die Matrix B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Man nimmt die Zeilenvektoren der Matrix A (Das T steht für Transformiert)

$$\vec{z_1} = (1,2,4)^T, \vec{z_2} = (3,2,1)^T$$

und die Spaltenvektoren der Matrix B:

$$\vec{s_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{s_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{s_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{s_4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Das Produkt der Matrix A mit der Matrix B ergibt sich aus den Skalarprodukten der Zeilen- und Spaltenvektoren (Zeilen der rechten x Spalten der linken Matrix):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \vec{z_1} \cdot \vec{s_1} & \vec{z_1} \cdot \vec{s_2} & \vec{z_1} \cdot \vec{s_3} & \vec{z_1} \cdot \vec{s_4} & \vec{z_1} \cdot \vec{s_2} \\ \vec{z_2} \cdot \vec{s_1} & \vec{z_2} \cdot \vec{s_2} & \vec{z_2} \cdot \vec{s_3} & \vec{z_2} \cdot \vec{s_4} & \vec{z_2} \cdot \vec{s_2} \end{pmatrix}$$

Das rechnet man am Besten mit einer Tabelle:

			1	1	0	-1
A	·	B	0	3	1	-1
			2	0	2	-2
1	2	4	9	7	10	-11
3	2	1	5	9	4	-7

Das Produkt hat immer so viele Zeilen wie der erste Faktor. Das heisst jetzt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 10 & -11 \\ 5 & 9 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Wichtig:

- Die Faktoren dürfen nicht vertauscht werden: $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Eine 2x4 und 4x4 Matrix kann auch nicht multipliziert werden.

5.2 Matrizen und ihre Inversen

Vorgehen: Matrix A links, und eine Einheitsmatrix E rechts hinschreiben. Die Matrix A zur Einheitsmatrix E umformen ergibt auf der rechten Seite die Inverse A^{-1}. Das ergibt folgende Beziehung:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Regeln:

- Werden in der Matrix A während dem Gauss-Algorithmus *Spalten* 1 und 2 vertauscht, muss man in der rechten Matrix am Schluss die *Zeilen* 1 und 2 vertauschen.

- Nicht jede Matrix ist invertierbar.

5.2.1 Invertierende einer 2x2 Matrix mit der Determinante berechnen

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Kehrwert der Determinante multipliziert mit der Matrix von A, in welcher die erste Diagonale vertauscht wurde und die zweite Diagonale mit (-1) multipliziert wurde.

6 Lineare Abbildungen

6.1 Koordinaten und Transformation

Eine lineare Abbildung beschreibt die Abbildung zwischen zwei Vektorräumen über demselben Körper.

Spalten der Matrix = die Bilder der Basisvektoren

$$A \cdot \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e_1}' = \vec{e_2}$$

6.1.1 Abbildungsmatrix bestimmen

- Wie kann der Einheitsvektor $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den gegebenen Vektoren dargestellt werden?
- Die Vektoren der Abbildungsmatrix M können auf die selbe Weise dargestellt werden, indem man die auf diese Matrix abgebildeten Vektoren verwendet.

$$\vec{e_1} = \frac{1}{2}(\vec{r_a} + \vec{r_b}) \Rightarrow \vec{e_1'} = \frac{1}{2}(\vec{r_a'} + \vec{r_b'})$$
$$\vec{e_2} = \frac{1}{4}(\vec{r_b} + \vec{r_c}) \Rightarrow \vec{e_2'} = \frac{1}{4}(\vec{r_b'} + \vec{r_c'})$$

Daraus folg die Abbildungsmatrix M.

Bei den Abbildungsmatritzen gilt:

$$M \cdot A = A' \Rightarrow M^{-1} \cdot A' = A$$

$$A \cdot P = Q \Rightarrow A' \cdot Q = P$$

6.2 Determinanten

6.2.1 Determinante einer 2x2 Matrix

Von der Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ist die Determinante

$$\operatorname{Det}(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Produkt der ersten Diagonale minus Produkt der zweiten Diagonale.

6.2.2 Determinante der invertierten Matrix

$$\operatorname{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)}$$

6.2.3 Regeln für das Rechnen mit Determinanten

Folgende Regeln sind bei Operationen mit Determinanten zu beachten:

- Determinanten können nur bei quadratischen Matrizen berechnet werden.
- Vertauschen von Zeilen oder Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante.
- Wenn eine Zeile mit $c \neq 0$ multipliziert wird, wird die Determinante mit $\frac{1}{c}$ multipliziert.
- **Eine Determinante ist Null, wenn eine gesamte Zeile oder eine gesamte Spalte $= 0$ ist.**
- Eine Determinante ist Null, wenn zwei Spalten oder zwei Zeilen gleich sind.
- Die Determinante ist Null, wenn Zeilen oder Spalten linear abhängig sind.
- **Eine obere Dreiecksmatrix hat als Determinante das Produkt der Diagonale.**
- $\operatorname{Det}(A \cdot B) = \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(B)$
- Ist die Matrize A invertierbar, dann ist $\operatorname{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)}$

- **Ist die Det(A) $\neq$ 0, so ist die Matrize A invertierbar.**

6.2.4 Determinante einer 3x3 Matrix

Die Determinante einer 3x3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Berechnet sich so:

$\text{Det}(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$

Man wiederholt die Zahlen der Matrix hinter der Matrix und addiert alle „fallenden“ Diagonalprodukte und subtrahiert alle „steigenden“ Diagonalprodukte.

6.2.5 Determinante einer $n \times m$ Matrix

Matrix reduzieren:

$$\text{Det}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -5 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -5 \\ 0 & 14 & 11 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{26}{7} \end{pmatrix} = 1 \cdot 78$$

6.2.6 Determinante einer $n \times m$ Matrix (einfach)

- Matrix mit Gauss in die Stufen/Treppenform umwandeln
- Diagonalprodukt bilden
- Pro Zeilen/Spaltenvertauschung mit (-1) multiplizieren
- Multiplikationen/Divisionen rückgängig machen ($\cdot 2 \Rightarrow \div 2$)

Und schon hat man die Determinante einer $n \times m$ Matrix berechnet.

6.2.7 Laplacescher Entwicklungssatz

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz kann man die Determinante einer $n \times n$-Matrix „nach einer Zeile oder Spalte entwickeln“. Die beiden Formeln lauten

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$ (Entwicklung nach der j-ten Spalte)

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$ (Entwicklung nach der i-ten Zeile)

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Hinweis: Wenn man Spalte oder Zeile, nach der man die Determinante entwickelt, geschickt wählt (möglichst viele Nullen!), kann die Rechnung gegebenenfalls stark vereinfacht werden.

6.2.8 Die Cramersche Regel

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem in der Form

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&... \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Vorausgesetzt $det(A) \neq 0$ kann das Gleichungssystem wie folgt gelöst werden

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

Die Matrix A_i wird hierbei gebildet, indem die $i$te Spalte der Koeffizientenmatrix A durch die rechte Seite des Gleichungssystems b ersetzt wird.

6.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

6.3.1 Eigenwerte

Die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

berechnet sich so:

$$\mathrm{Det}(A - \lambda E) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)+1$$

Diese quadratische Gleichung löst man fertig auf und erhält die (zwei) Eigenwerte. Indem man die Determinante einer Matrix 0 setzt, können die Eigenwerte berechnet werden:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (3-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 1 \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda-2)\cdot(\lambda-4) &= 0 \end{aligned}$$

6.3.2 Eigenvektor

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 4: \quad & (A - 4 \cdot E)\cdot \vec{v_1} &=& \quad 0 \\ & \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &=& \quad 0 \\ & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &=& \quad 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Gauss-Algorithmus} \qquad \left.\begin{array}{rr} -1x_1 & 1x_2 \\ 1x_1 & -1x_2 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \qquad \text{Wähle } x_2 = 1 \\ & \Rightarrow x_1 = 1 \\ & \Rightarrow x_2 = 1 \\ & \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = 2: \quad & (A - 2\cdot E)\cdot \vec{v}_2 &=& \quad 0 \\
& \left(\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} &=& \quad 0 \\
& \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} &=& \quad 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Gauss-Algorithmus} & \left.\begin{matrix}1x_1 & 1x_2\\1x_1 & 1x_2\end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \quad \text{Wähle } x_2 = 1 \\
& \Rightarrow x_1 & = & \quad -1 \\
& \Rightarrow x_2 & = & \quad 1 \\
& \Rightarrow \vec{v}_2 & = & \quad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6.3.3 Kanonische Basis zu Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix} = B$$

6.3.4 Berechnung der Eigenvektoren

Als Beispiel mit einer 2x2 Matrix

Eigenwerte = Nullstellen des charakteristischen Polynoms

1. Charakteristisches Polynom durch die Determinante mit der Einheitsmatrix

$$\text{CharPol}(A, \lambda) = \text{Det}(A - \lambda \cdot E)$$

2. Determinante nach 0 auflösen ergeben die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = x, \lambda_2 = y$$

Eigenvektoren = Lösungen des linearen Gleichungssystems

1. Eigenwerte λ_1 bzw. λ_2 einsetzen und Gleichungssystem lösen

$$\lambda_1 = x : (A - \lambda \cdot E)\cdot \vec{v} = 0 \text{ bzw. } \lambda_2 = y : (A - \lambda \cdot E)\cdot \vec{v} = 0$$

2. Daraus ergeben sich die Einheitsvektoren

$$EV_{\lambda_1=x} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } EV_{\lambda_2=y} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Eigenraum Der Eigenvektor kann ein beliebiges Vielfaches sein. Daraus folgt der Eigenraum:

$$Eig_{\lambda_1=x} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

bzw.

$$Eig_{\lambda_2=y} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

7 Varia

7.1 Ist Teiler von

Folgendes heisst a ist ein Teiler von b:

$$a|b$$

7.2 Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n$$

Man kann sich das wie eine For-Schleife vorstellen:

```
for i in ‘seq k n‘
do
  SUM=$(($SUM + i))
done
```

7.3 Produkteformel

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$$

7.4 Lösungsformel Quadratische Gleichungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Determinante: $\sqrt{b^2 - 4ac}$

- Determinante > 0: Zwei Lösungen
- Determinante $= 0$: Eine Lösungen
- Determinante < 0: Keine Lösungen