Zusammenfassung An2I

Analysis für Informatiker 2

Emanuel Duss
emanuel.duss@gmail.com

17. September 2013

HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

FHO Fachhochschule Ostschweiz

Zusammenfassung An2I
Analysis für Informatiker 2

Dieses Dokument basiert auf der Vorlesung „Analysis für Informatiker 2“ der HSR (Hochschule für Technik Rapperswil) vom FS 2013.

Version 432d766 vom 2013-08-18.

MITMACHEN
Falls Du an diesem Dokument mitarbeiten willst, kannst Du das Dokument auf GitHub unter `http://github.com/mindfuckup/HSR_An2I_Zusammenfassung` forken.

MITWIRKENDE
Folgende Personen haben an diesem Dokument mitgewirkt:
Emanuel Duss (eduss@hsr.ch)

Inhaltsverzeichnis

1 Integralrechnung

1.1 Grundlagen

1.1.1 Bestimmtes Integral

Sei f eine auf dem Intervall $[a; b]$ definierte Funktion. Wenn der Grenzwert

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } x_k = a + k \cdot \Delta x$$

existiert, dann heisst die Funktion auf dem Intervall $[a; b]$ integrierbar.

1.1.2 Graphische Interpretation von Integralen

Beim Integral $\int_a^b f$ gibt es zwei Fälle:

- Wenn $a < b$: Positive Ordinate zählt positiv; Negative Ordinate zählt negativ
- Wenn $a > b$: Positive Ordinate zählt negativ; Negative Ordinate zählt positiv

1.1.3 Grundregeln für Integrale

- Faktorregel: $\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f$
- Vertauschen der Integralgrenzen ändert das Vorzeichen des Integrals: $\int_a^b f = -\int_b^a f$
- Aneinanderstossende Integrale können zusammengefasst werden: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$
- Linearität: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- Gleiche Integrationsgrenzen $\int_a^a f = 0$

1.1.4 Nummerische Berechnung von Integralen

Rechteckregel:

$$\int_a^b f = \Delta x \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } x_k = a + k \cdot \Delta x$$

1.2 Berechnung von Integralen mit Stammfunktionen

1.2.1 Integralfunktion

$$\phi_a(x) = \int_a^x f$$

- Die Integralfunktion hängt vom Parameter a ab.
- Ändert man den Parameter a, so ändert sich die Integralfunktion nur um eine Konstante ($\phi_b(x) = \phi_a(x) + c$), was eine Verschiebung auf der Y-Achse bewirkt.

Aus der Ableitung der Integralfunktion erhalten wir die ursprüngliche Funktion:

$$\frac{x}{dx}\phi_a(x) = \frac{dx}{x}\int_a^x f = f(x)$$

1.2.2 Stammfunktion

Wir nennen eine Funktion F Stammfunktion von f, wenn die Ableitung der Stammfunktion f ergibt:

$$F \text{ mit } F' = f$$

1.2.3 Hauptsatz

Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion. Umgekehrt kann jede Stammfunktion zum berechnen von Integralen benutzt werden.

$$\phi_a(b) = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_{x=a}^{b} = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

1.2.4 Unbestimmtes Integral

Das unbestimmte Integral $\int f$ ist die Menge aller Stammfunktionen von f.

$$\int f(x)dx = F(x) + c \text{ bzw. } \int f = F + c$$

1.2.5 Rechenregeln

- Verkettung linearer Funktionen: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$
- Produkteregel (Partielle Integration): $\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = (f(x) \cdot g(x))|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$
- Spezialfall der Produkteregel: $\int f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x) + c$
- Quotientenregel: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(|f(x)|) + c$
- Substitutionsregel I: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c$
- Substitutionsregel II : $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

2 Fouriertransformation

2.1 Fourierreihen

Eine Fourierreihe der Funktion f besteht aus einer Linearkombination von Sinus- und Kosinus-Funktionen, welche alle dieselbe Persiode T haben. Je höher die Ordnung n, desgo genauer wird die Funktion f aproximiert.

2.1.1 Sinus-Kosinus-Form

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t))$$

- Grundkreisfrequenz (Gemeinsame Periode) $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
- Konstante (Signalmittelwert) $a_0 = A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$
- Koeffizient $a_k = A_k \cdot \cos(\phi_k) = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$
- Koeffizient $b_k = A_k \cdot \sin(\phi_k) = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$

2.1.2 Amplituden-Phasen-Form

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cdot \cos(k\omega_1 t - \phi_k))$$

- Grundkreisfrequenz (Gemeinsame Periode) $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
- Konstante (Signalmittelwert) $A_0 = a_0$
- Koeffizient $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
- $\phi_k = \begin{cases} arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) & \text{für } a_k > 0 \text{ } (= 0 \text{ wenn } b_k = 0) \\ arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi & \text{für } a_k < 0 \text{ } (= \pi \text{ wenn } b_k = 0) \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a_k = 0 \wedge b_k > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a_k = 0 \wedge b_k < 0 \end{cases}$

2.2 Eigenschaften

2.2.1 Gerade und ungerade Funktionen

Gerade Funktionen

- Für die geraden Funktionen ist das Integral $\int_0^{\frac{T}{2}}$ am optimalsten.
- Sinus-Kosinus-Form: $s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot \cos(k\omega_1 t))$
- Koeffizient $a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \cos(k\omega_1 t)dt$
- Koeffizient $b_k = 0$
- Reine Kosinusreihe (cos ist auch gerade)

Ungerade Funktionen

- Für die ungeraden Funktionen ist das Integral $\int_0^{\frac{T}{2}}$ am optimalsten.
- Sinus-Kosinus-Form: $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(b_k \cdot \sin(k\omega_1 t))$
- Koeffizient $b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \sin(k\omega_1 t)dt$
- Koeffizient $a_k = 0$
- Reine Sinusreihe (sin ist auch gerade)

2.2.2 Transformation von Fourierreihen

Spiegeln an X-Achse

- Transformation: $r(t) = -s(t)$
- Sinus-Kosinus-Form: $\boldsymbol{-a_0} + \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{-a_k} \cdot \cos(k\omega_1 t) + \boldsymbol{(-b_k)} \cdot \sin(k\omega_1 t))$
- Amplituden-Phasen-Form: $\boldsymbol{-A_0} + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cdot \cos(k\omega_1 t - \boldsymbol{(\phi_k + \pi)}))$

Spiegeln an Y-Achse

- Transformation: $r(t) = s(-t)$
- Sinus-Kosinus-Form: $a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + \boldsymbol{(-b_k)} \cdot \sin(k\omega_1 t))$
- Amplituden-Phasen-Form: $A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cdot \cos(k\omega_1 t - \boldsymbol{(-\phi_k)}))$

Skalierung auf der X-Achse (Zeitskalierung)

- Transformation: $r(t) = s(c \cdot t)$ für $c > 0$
- Für $c < 0$: Zusätzliche Transformation: $r(t) = s(-t)$
- Periodendauer $\hat{T} = \frac{1}{c}T$
- Sinus-Kosinus-Form: $a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos(k\boldsymbol{(c\omega_1)}t) + b_k \cdot \sin(k\boldsymbol{(c\omega_1)}t))$
- Amplituden-Phasen-Form: $A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cdot \cos(k\boldsymbol{(c\omega_1)}t - \phi_k))$

Skalierung auf der Y-Achse (Vertikalskalierung)

- Transformation: $r(t) = c \cdot s(t)$ für $c > 0$
- Sinus-Kosinus-Form: $\boldsymbol{(c \cdot a_0)} + \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{(c \cdot a_k)} \cdot \cos(k\omega_1 t) + \boldsymbol{(c \cdot b_k)} \cdot \sin(k\omega_1 t))$
- Amplituden-Phasen-Form: $\boldsymbol{(c \cdot A_0)} + \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{(c \cdot A_k)} \cdot \cos(k\omega_1 t - \phi_k))$

Verschieben auf der X-Achse (Zeitverschiebung)

- $r(t) = s(t - c)$ für $c > 0$
- Sinus-Kosinus-Form mittels Additionstheoremen berechnen

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot \cos(k\omega_1 \boldsymbol{(t - c)}) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 \boldsymbol{(t - c)}))$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot \cos(\boldsymbol{k\omega_1 t - k\omega_1 c}) + b_k \cdot \sin(\boldsymbol{k\omega_1 t - k\omega_1 c}))$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n}[a_k(\cos(k\omega_1 t) \cdot \cos(k\omega_1 c) + \sin(k\omega_1 t) \cdot \sin(k\omega_1 c)) + b_k(\sin(k\omega_1 t) \cdot \cos(k\omega_1 c) - \cos(k\omega_1 t) \cdot \sin(k\omega_1 c))$$

$= a_0 + \sum_{k=1}^{n} [\boldsymbol{(a_k \cdot \cos(k\omega_1 c) - b_k \cdot \sin(k\omega_1 c))} \cdot \cos(k\omega_1 t) + \boldsymbol{(a_k \cdot \sin(k\omega_1 c) + b_k \cdot \cos(k\omega_1 c))} \cdot \sin(k\omega_1 t)]$

- Amplituden-Phasen-Form: $A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cdot \cos(k\omega_1 t - \boldsymbol{(k\omega_1 c + \phi_k)}))$

Verschieben auf der Y-Achse (Vertikalverschiebung)

- Transformation: $r(t) = s(t) + c$
- Sinus-Kosinus-Form: $\boldsymbol{(a_0 + c)} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t))$
- Amplituden-Phasen-Form: $\boldsymbol{(A_0 + c)} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cdot \cos(k\omega_1 t - \phi_k))$

3 Differenzialgleichungen

3.1 Begriffe

- Anwendungsgebiet: Viele Naturgesetze können mit einer Differenzialgleichung (DGL) modelliert werden.
- Differenzialgleichung: Gleichung zwischen einer Funktion und derer Ableitung
- Ordnung: Höchste vorkommende Ableitung
- Allgemeine Lösung: Lösungsmenge mit unendlich verschiedenen Lösungen (eine Differenzialgleichung hat in der Regel unendlich viele Lösungen)
- Spezielle Lösung: Einzelne Lösung aus der Lösungsmenge
- Anfangsbedingungen: Bedingungen um spezielle Lösung anzugeben. Vorgabe des Funktionswerts und aller Beleitungen der Funktion bis zum Grad Ordnung - 1 an einer einzigen gemeinsamen Stelle (Z. B. 1. Ordnung: $f(x_0) = 23$). Die Anfangsbedingungen sorgen dafür, dass die DGL nur noch von einer einzigen speziellen Lösung erfüllt werden.
- Anfangswertproblem: Differenzialgleichung mit Anfangsbedingungen

3.1.1 Explizite Differenzialgleichung

Bei einer expliziten Differenzialgleichung ist die höchste Ableitung ist auf eine Seite isoliert:

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = G(x, f(x))$$

3.2 Näherungslösung mit dem Verfahren nach Euler

Gegeben ist eine Differenzialgleichung:

$$f'(x) = 2x - 3f(x) + 1$$

Mit dem Anfangswertproblem:

$$f(0) = 0$$

Stufe #	x x	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x) = 2x - 3f(x) + 1$	Linearisierung $f(\tilde{x}) \approx f(x) + f'(x)(\tilde{x} - x)$
0	0	$f(0) = 0$	$f'(x) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$	$f(\tilde{x}) = 0 + 1(\tilde{x} - 0)$
1	0.1	$f(\tilde{x}) = 0 + 1(0.1 - 0) = 0.1$	$2 \cdot 0.1 - 3 \cdot 0.1 + 1 = 0.9$	$0.1 + 0.9(\tilde{x} - 0.1)$
2	0.2	$0.1 + 0.9(0.2 - 0.1) = 0.19$	$2 \cdot 0.2 - 3 \cdot 0.19 + 1 = 0.83$	$0.19 + 0.83(\tilde{x} - 0.2)$
3	0.3	$0.19 + 0.83(0.3 - 0.2) = 0.273$	...	...

Somit ist $f(0.3) \approx 0.273$.

3.3 Separierbare Differenzialgleichung

Eine separierbare Differenzialgleichung kann auf folgende Form gebracht werden:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$$

Es handelt sich um eine explizite Differenzialgleichung erster Ordnung, wobei die Ableitung $f'(x)$ der gesuchten Funktion als Quotient dargestellt wird. Der Zähler ist abhängig von x, der Nenner von $f(x)$.

Oder als Produkt:

$$f'(x) = g(x) \cdot h(f(x))$$

Ein Faktor ist nur von x, der andere nur von $f(x)$ abhängig.

3.3.1 Lösen von separierbaren Differenzialgleichungen

Schritt 0: Schreibweise: Die Differenzialgleichungen wird in die Termschreibweise gebracht.

$$\frac{df}{dx} = g(x) \cdot h(f)$$

Schritt 1: Separieren: Wir behandeln df und dx wie Variabeln mit dem Ziel df und f links, dx und x rechts vom Gleichheitszeichen zu haben:

$$\frac{1}{h(f)} df = g(x) dx$$

Schritt 2: Integrieren: Danach wird auf beiden Seiten integriert:

$$\int \frac{1}{h(f)} df = \int g(x) dx$$

Schritt 3: Auflösen: Danach kann die Gleichung nach f aufgelöst werden. Die Integrationskonstante darf nicht vergessen werden, weil man sonst nicht die allgemeine Lösung erhält.

3.4 Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x) = g(x)$$

oder

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x) = g(x)$$

- a_k: Gegebene Konstanten
- g: Vorgegebene Funktion (Störfunktion): $g = 0$: homogen; $g \neq 0$: inomogen

3.4.1 Linearitätsgesetze der homogenen linearen Differenzialgleichung

- Sind f_1 und f_2 Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung, ist auch die Summe davon eine Lösung.
- Ist f eine Lösung einer homogenen linearen Differenzialgleichung und c eine Konstante, ist auch das Produkt eine Lösung.

3.4.2 Homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

Die lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$2f(x) + 3f'(x) = 0$$

kann mit diesem Ansatz gelöst werden, indem man $f(x)$ und $f'(x)$ ersetzt:

$$f(x) = e^{sx}$$

und

$$f'(x) = s \cdot e^{sx}$$

Dabei ist s eine noch unbekannte Konstante. Das setzt man in die Differenzialgleichung ein:

$$2 \cdot e^{sx} + 3 \cdot s \cdot e^{sx} = 0$$

Dann wird durch e^{sx} dividiert, damit man die Konstante s erhält:

$$2 + 3 \cdot s = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{2}{3}$$

Somit ist eine Lösung (spezielle Lösung):

$$f(x) = e^{-\frac{2}{3}x}$$

Und aufgrund des Linearitätsgesetzes auch jedes konstante Vielfache davon (allgemeine Lösung):

$$f(x) = A \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$$

3.4.3 Homogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

Homogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung:

$$c_2 f''(x) + c_1 f'(x) + c_0 f(x) = 0$$

In charakteristisches Polynom umwandeln und nach s auflösen:

$$c_2 s^2 + c_1 s + c_0 = 0$$

Fall 1: Zwei verschiedene Lösungen (Diskriminante ist positiv)

$$f(x) = Ae^{s_1 x} + Be^{s_2 x}$$

Fall 2: Nur eine Lösung (Diskriminante ist Null)

$$f(x) = (Ax + B)e^{s_1 x}$$

Fall 3: Keine Lösung (Diskriminante ist negativ)

$$f(x) = e^{rx}(A\cos(\omega x) + B(\sin(\omega x)) \Leftrightarrow f(x) = Ce^{rx}\cos(\omega x - \phi)$$

Lösungsformel auf folgende Form bringen:

$$s = a \pm \sqrt{b}$$

Dann ist

$$r = a \text{ und } \omega = \sqrt{-b}$$

Hinweis: A, B, C und ϕ sind jeweils frei wählbar.

3.4.4 Inhomogene lineare Differenzialgleichung

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung für

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x) = s(x)$$

ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x) = 0$$

1. Zuerst wird eine spezielle Lösung von f, f' sowie f'' erraten.

2. Durch Einsetzen prüft man ob diese Lösung stimmt.

3. Lösungsmenge = spezielle Lösung + allgemeine Lösung.

4 Anhang

4.1 Summenformeln

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

4.2 Additionstheoreme

- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

4.3 Trignometrische Funktionswerte

- $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

4.4 Lösungsformel für die quadratische Gleichung

Die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hat die Lösungsformel

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$