Zusammenfassung WrStat

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Emanuel Duss
emanuel.duss@gmail.com

13. Februar 2014

HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

FHO Fachhochschule Ostschweiz

Zusammenfassung WrStat
Wahrscheinlichkeit und Statistik

Dieses Dokument basiert auf der Vorlesung „Wahrscheinlichkeit und Statistik“ der HSR (Hochschule für Technik Rapperswil) vom HS 2013.

Revision cae6209 vom 2014-01-31.

MITMACHEN
Falls Du an diesem Dokument mitarbeiten willst, kannst Du das Dokument auf GitHub unter http://github.com/mindfuckup/HSR_WrStat_Zusammenfassung forken.

MITWIRKENDE
Folgende Personen haben an diesem Dokument mitgewirkt:
Emanuel Duss (eduss@hsr.ch)
Laurin Murer (l1murer@hsr.ch)
Lorenz Wolf (l1wolf@hsr.ch)
Philipp Koster (pkoster@hsr.ch)

Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorik (Zählen)

1.1 Produktregel: Die Für–jedes–gibt–es–Regel (FJGE)

Fur jede der n_1 Möglichkeiten gibt es eine von der ersten Position unabhängige Anzahl n_2 Möglichkeiten für den Rest.

$$= n_1 \cdot n_2 \text{ Möglichkeiten}$$

1.2 Permutationen: Reihenfolge

Anzahl Anordnungen: Auf wieviele Arten kann man n Objekte anordnen?

$$= n! \text{ Arten}$$

1.3 Kombinationen: Auswahl

Auf wieviele Arten kann man k Objekte aus n auswählen?

$$= C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ Arten}$$

Dieser „Binomialkoeffizient“ lässt sich auf dem Taschenrechner TI-36XII mit `n nCr k` (unter `PRB`), mit dem Voyage 200 mit `nCr(n,k)`, in Sage mit `binomial(n,k)` und in Octave/Matlab mit `nchoosek(n,k)` berechnen.

Auf wieviele Arten kann man k Mal eine Auswahl aus n Objekten treffen?

$$= n^k \text{ Arten}$$

1.4 Hypergeometrische Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, bei einer n Elemente umfassenden Stichprobe aus einer N Elemente grossen Gesamtheit, in der M ein bestimmtes Merkmal tragen, deren m mit dem Merkmal zu finden sind:

$$= \frac{\binom{M}{n} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit i Items einer Art (von welcher es a gibt) aus der Menge (mit Grösse m) mit einer Stichprobengrösse s auszuwählen?

$$= \frac{\binom{m-a}{s-i} \cdot \binom{a}{i}}{\binom{m}{s}}$$

2 Ereignisse und Wahrscheinlichkeit

2.1 Wahrscheinlichkeitsexperimente

- Alle möglichen Versuchsausgänge Ω
- Elementarereignis $\omega \in \Omega$
- Ereignis $A \subset \Omega$
- Verschiedene Elementarereignisse $\omega \in A$
- Ereignis A tritt ein $\Leftrightarrow \omega \in A$
- Wahrscheinlichkeit dass Ereignis A eintritt ist $P(A)$

2.2 Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

- Laplace-Ereignisse: Alle Elementarereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit
- $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$: Wahrscheinlichkeit von Elementarereignis A
- $0 \leq P(A) \leq 1$: Wahrscheinlichkeit ist immer zwischen 0 und 1
- $P(A) < P(B)$: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A ist kleiner als für B
- $P(\Omega) = 1$: Das sichere Ereignis tritt immer ein
- $P(\emptyset) = 0$: Das unmöglich Ereignis tritt nie ein

2.3 Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

- $P(A \cap B)$: Ereignis A und Ereignis B tritt ein
  - Falls unabhängig: $= P(A) \cdot P(B)$
  - Drei Ereignisse: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(B)$
  - Falls abhängig: Nicht alleine aus $P(A)$ und $P(B)$ berechenbar!

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$[1]: Ereignis A oder Ereignis B tritt ein
  - Falls sich A und B nicht überschneiden[2]: $= P(A) + P(B)$
  - Drei Ereignisse: $P(A \cup B \cup C)$
    $= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$: Ereignis A tritt ein, aber ohne Ereignis B
- $P(\bar{A}) = P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$: Ereignis A tritt nicht ein
  - Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, wenn wir schon wissen, dass B eingetreten ist.[3]

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Falls A und B unabhängig sind (z. B. Behauptung eines Kritikers):

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

und

$$P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B}) \text{ und } P(B) = P(B|A) = P(B|\overline{A})$$

2.5 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Aus Einzelfällen kann man die Gesamtsituation zusammenstellen:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

[1] Ein- Ausschaltformel
[2] Paarweise disjunkt: A und B treffen nicht gleichzeitig ein
[3] Somit gilt auch: $P(A) = P(A|\Omega)$

2.6 Satz von Bayes

Mit dem Satz von Bayes kann man die Schlussrichtung umkehren [4]:

$$P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

[4] Weil $P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

3 Erwartungswert und Varianz

3.1 Erwartungswert

3.1.1 Begriffe

- Zufallsvariable X ordnet Elementarereignissen ω Werte zu: $X : \Omega \to \mathbb{R}$
- Erwartungswert (Zufallsvariable im Mittel):
  $E(X) = \sum_{Werte}$ Wert $\cdot$ Wahrscheinlichkeit $= \sum_i w_i \cdot P(w_i)$
- Empirischer Erwartungswert = arithmetisches Mittel: $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

3.1.2 Spezielle Zufallsvariable

Charakteristische Funktion von A:

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & w \in A \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$E(X) = 0 \cdot P(\bar{A}) + 1 \cdot P(A) = P(A)$$

3.1.3 Rechnen mit Erwartungswerten

- Multiplikation mit einem Faktor: $E(\lambda X) = \lambda E(X)$
- Addition zweier Zufallswerte: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- Produkt zweier Zufallswerte: $E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y)$
  - Potenzieren (immer abhängig): $E(X^2) \neq E(X)^2$
  - Wenn die zwei Werte sich nicht beeinflussen (unabhängig): $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
- Erwartungswert einer Konstante c: $E(c) = c$

3.2 Varianz (Streubreite)

3.2.1 Begriffe

- Varianz (Mass für die mittlere Abweichung): $\mathrm{var}(x) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum((x - E(x))^2 \cdot p(x))$
- Je grösser die Varianz, desto Wahrscheinlicher sind grosse Abweichungen vom Mittelwert.
- Kovarianz (Verschiebungssatz): $\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- Standardabweichung: Abstand ($\pm$) zum Erwartungswert: $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(x)}$

3.2.2 Rechenregeln für Varianz

- Multiplikation mit einem Faktor: $\mathrm{var}(\lambda X) = \lambda^2 \mathrm{var}(X)$
- Addition (nur wenn X und Y unabhängig): $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$
  - Achtung: ($(-x)^2 = +x$): $\mathrm{var}(X - Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(-Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$
- Multiplikation: $\mathrm{var}(X \cdot Y) = \mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y) + \mathrm{var}(Y)E(X)^2 + \mathrm{var}(X)E(Y)^2$
- Varianz einer Konstante c: $\mathrm{var}(c) = 0$
- Kovarianz als Verallgemeinerung der Varianz: $\mathrm{var}(X) = \mathrm{cov}(X, X)$

3.3 Mittelwert

3.3.1 Begriffe

- Erwartungswert der Zufallsvariablen X: $\mu = E(X)$
- Varianz: Abweichung der Zufallsvariabeln von ihrem Erwartungswert: $X - \mu$
- Wie häufig überschreitet die Abweichung ε?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass die Abweichung gross ist? $P(|X - \mu| > \varepsilon)$

- Faustregel: 10 mal mehr Genauigkeit = 100 mal mehr Arbeit.

3.3.2 Ungleichung von Tschebyscheff

Genauigkeit des Mittelwertes: Wahrscheinlichkeit, dass Zufallsvariable X um mehr als ε vom Erwartungswert abweicht:

$$P(|X-\mu|>\varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{\varepsilon^2}$$

3.3.3 Wie gut ist der Mittelwert?

- Mittelwert: $M_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$
- Erwartungswert: $E(X_i) = E\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right) = \frac{E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)}{n} = \mu$
- Varianz: $\operatorname{var}(X_i) = \sigma^2$
- Varianz: $\operatorname{var}(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$

Bernoullis Gesetz der grossen Zahlen Die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert von n unabhängigen Zufallsvariabeln mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 mehr als ε von μ abweicht, ist:

$$P(|X-\mu|>\varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Die Abweichung ist unwahrscheinlich, wenn:

- Varianz ist klein (genaues Messgerät)
- ε ist gross (man ist toleranter)
- n ist gross (viele Messungen)

3.4 Lineare Regression

Seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen. Die Gerade mit der Gleichung $y = ax + b$ minimiert die Varianz $\mathrm{var}(aX + b - Y)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{E(X^2) - E(X)^2} \\ b &= E(Y) - E(X)a \end{aligned}$$

Die Regression ist umso genauer, je näher der Regressionskoeffizient r bei ± 1 liegt. Zudem hat r immer das gleiche Vorzeichen wie die Steigung der Regressionsgerade.

$$r = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y)}}$$

- Ist $r = 0$: Kein linearer Zusammenhang zwischen x und y (Unabhängig)
- Ist $r = 1$: Kein Fehler bei der Approximation

Zur Berechnung der Regression eignet sich folgende Tabelle sehr gut, damit man alle Werte im Überblick hat:

i	x_i	y_i	${x_i}^2$	${y_i}^2$	$x_i \cdot y_i$
1	x_1	y_1	${x_1}^2$	${y_1}^2$	$x_i \cdot y_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E	$E(x_i)$	$E(y_i)$	$E({x_i}^2)$	$E({y_i}^2)$	$E(x_i \cdot y_i)$

- Punkt auf X-Achse: x_i
- Punkt auf Y-Achse: y_i
- $E(X)$ ist das arithmetische Mittel

4 Wahrscheinlichkeitsverteilung

4.1 Begriffe

- Verteilungsfunktion: $F(x) = P(X \leq x)$
- Die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariablen X, $F(x) = P(X \leq x)$, zeigt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X den Wert x nicht überschreitet.
- Monoton wachsend: $F(b) - F(a) = P(a < X \leq b) \geq 0$ falls $a \leq b$
- Ableitung von F (Wahrscheinlichkeitsdichte / Dichtefunktion): $F'(x) = \varphi(x)$

  $\Leftrightarrow \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(\tau) d\tau$
- Formen der Zufallsvariabeln
  - Diskret: Zufallsvariable kann endlich viele Werte annehmen. (F ist stückweise konstant (Treppenstufen))
  - Stetig: Zufallsvariable kann unendlich viele Werte annehmen. (F ist ist stetig)

4.2 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

- Verteilfunktion zwischen 0 und 1: $0 \leq F(x) \leq 1$
- Grenzwerte: $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
- F ist monoton wachsend: $a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$

4.3 Eigenschaften der Dichtefunktion

- Fläche = 1: $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$

4.4 Erwartungswert berechnen

- F ist diskret: $E(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$

- F ist stetig: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)dx$ und $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x)dx$
- Ist F symmetrisch, gilt $E(X) = 0$

4.5 Rechenregeln für die Verteilungsfunktion

- Umformen um Wahrscheinlichkeit zu berechnen: $P(X > n) = 1 - P(X \leq n) = 1 - F(n)$
- Multiplikation mit einem Faktor $\lambda > 0$: $F_{\lambda X}(x) = P(\lambda X \leq x) = P(X \leq \frac{x}{\lambda}) = F_X(\frac{x}{\lambda})$
- Addition: $F_{X+a}(x) = P(X + a \leq x) = P(X \leq x - a) = F_X(x - a)$
- Quadrieren: $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x})$
- Addition zweier diskreten Zufallszahlen: $F_{X+Y}(x) = \sum_x P(X = x)P(Y = z - x)$

4.6 Standardisierung

Ist X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2, dann ist

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

eine neue Zufallsvariable Y mit $E(Y) = 0$ und $\text{var}(Y) = 0$. Zwischen den Verteilungsfunktionen F_X und F_Y bestehen die Beziehungen:

$$F_Y(y) = F_X(y\sigma + \mu) \qquad \text{und} \qquad F_X(x) = F_Y\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Hat die Verteilungsfunktion eine Dichte, dann gilt zudem:

$$\varphi_Y(y) = \sigma\varphi_X(y\sigma + \mu) \qquad \text{und} \qquad \varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi_Y\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Dasselbe gilt für Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \leq x_0) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Y \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right)$$

5 Katalog von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.1 Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.1.1 Gleichverteilung

Sei X eine in $[a, b]$ gleichverteilte Zufallsvariable, dann gilt:

Anwendung Verteilung von Zufallszahlen

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Erwartungswert

$$E(X) = \mu = \frac{a+b}{2}$$

Varianz

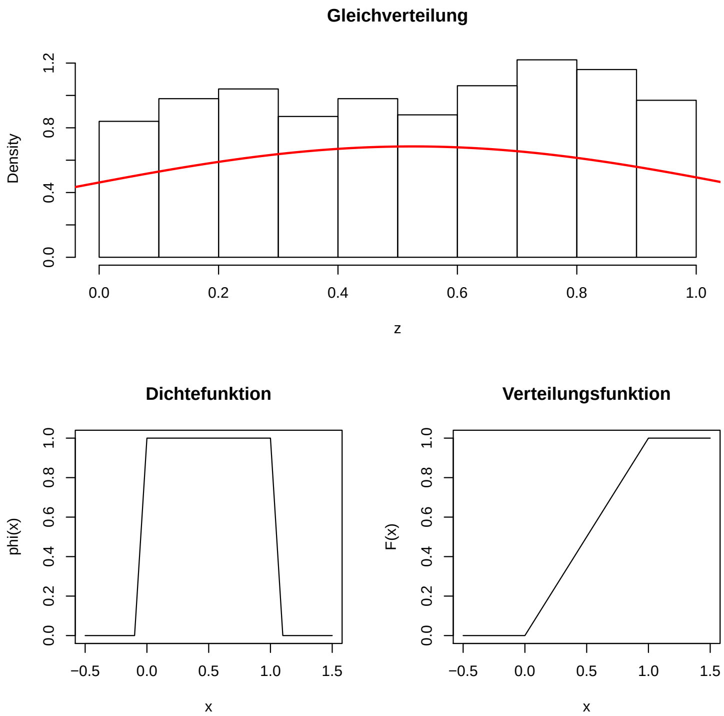
$$\text{var}(X) = \sigma^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Median

$$\text{med}(X) = \frac{a+b}{2}$$

Wahrscheinlichkeit einer grossen Abweichung Für $\varepsilon > \frac{b-a}{2}$ ist die Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| > \varepsilon)$ einer Abweichung vom Erwartungswert $\mu = E(X)$ natürlich 0, aber für kleinere ε ergibt sich

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) = 1 - \frac{2\varepsilon}{b-a}$$



5.1.2 Exponentialverteilung

Anwendung Prozess ohne Erinnerungsvermögen, radioaktiver Zerfall, ermüdungsfreie Bauteile

Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ ae^{-ax} & x \geq 0 \end{cases}$$

Verteilungsfuntkion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & x \geq 0 \end{cases}$$

Erwartungswert

$$E(X) = \mu = \frac{1}{a}$$

Varianz

$$\text{var}(X) = \sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$

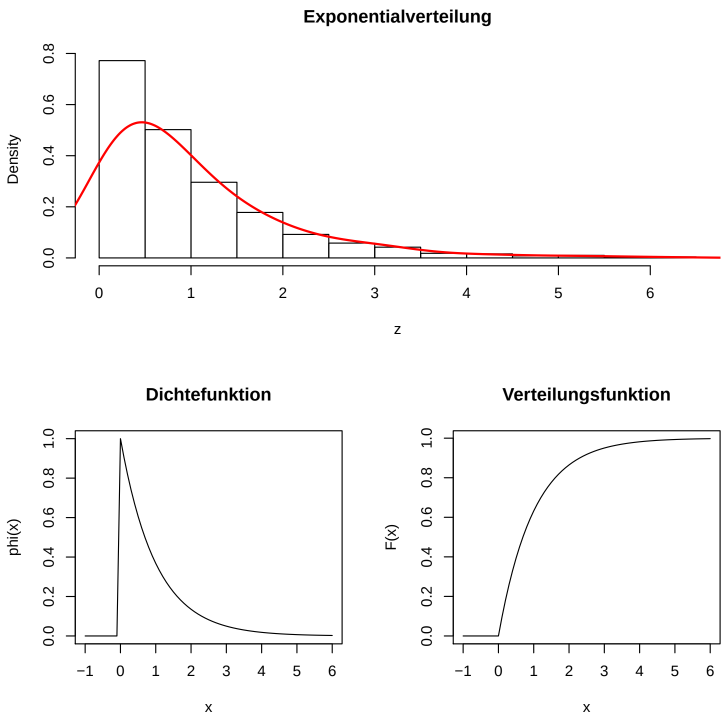
Median

$$\mathrm{med}(X) = \frac{1}{a} \log 2$$

Wahrscheinlichkeit grosser Abweichung Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\frac{1}{a}$ ist die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung ε vom Erwartungswert

$$P(|X - \frac{1}{a}| > \varepsilon) = \begin{cases} e^{-a\varepsilon-1} & \varepsilon > \frac{1}{a} \\ 1 - e^{a\varepsilon-1} + e^{-a\varepsilon-1} & \varepsilon \leq \frac{1}{a} \end{cases}$$

MTBF Mean Time Between Failure: $= \mu = \sigma = \sqrt{\mathrm{var}}$



5.1.3 Normalverteilung / Gaussverteilung

Anwendung Messfehler, Summe von vielen voneinander unabhängigenn Zufallsvariabeln, Approximation der Binomialverteilung, Rauschen

Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Verteilungsfunktion Siehe Tabelle im Anhang.

Erwartungswert

$$E(X) = \mu$$

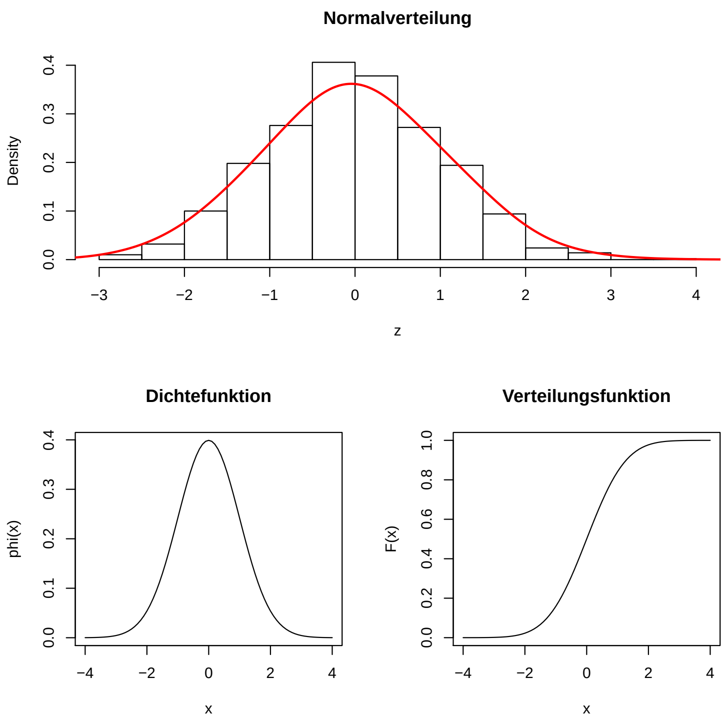
Varianz

$$\operatorname{var}(X) = \sigma^2$$

Median

$$\operatorname{med}(X) = \mu$$

Wahrscheinlichkeit Keine einfache Formel für $P(|X - E(X)| > \varepsilon)$



5.1.4 Potenzverteilung / Pareto-Verteilung

Anwendung Häufkeitsverteilung für skaleninvariante Prozesse, Einkommensverteilung Grösse und Häufigkeit von Mondkratern, Verkaufszahlen von Büchern, Einwohnerzahlen von Städten

Dichtefunktion

$$\varphi(X) = \begin{cases} Cx^{-\alpha} & x \geq x_{min} \\ 0 & x < x_{min} \end{cases}$$

Typische Werte für α: $1 \leq \alpha \leq 3$

Verteilungsfunktion

Varianz

Median

Wahrscheinlichkeit

5.2 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.2.1 Gleichverteilung

Erwartungswert

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Varianz

$$\text{var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

5.2.2 Binomialverteilung

Anwendungen Anzahl Einheiten eines Bernoulli-Ereignisses bei n Wiederholungen (2 mögliche Versuchsausgänge).

Wahrscheinlichkeit Eine Zufallsvariable mit diskreten Werten $k \in \{0, \ldots, n\}$ heisst binomialverteilt zum Parameter p, (Wahrscheinlichkeit) wenn folgendes die Wahrscheinlichkeit des Wertes k ist. Wahrscheinlichkeit, dass $X = 1$ k-mal eingetreten ist:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- n = Anzahl Versuche
- p = Wahrscheinlichkeit einer Zufallsvariable

- k = Anzahl eintreffende Ereignisse

Verteilungsfunktion

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Erwartungswert

$$E(X) = np$$

Varianz

$$\text{var}(X) = np(1-p)$$

Maximale Varianz wird erreicht bei $p = \frac{1}{2}$

Schlecht berechenbar Ist n und p gross, dauert das berechnen der Wahrscheinlichkeit sehr lange. Dann kann man davon ausgehen, dass die Zufallsvariable X annähernd normalverteilt ist.

5.2.3 Poissonverteilung

Anwendung Anzahl Ereignisse in einem Zeitintervall, wenn die Zeitabstände exponentiell verteilt sind. Approximation der Binomialverteilung für seltene Ereignisse, die mit Rate λ eintreten.

Verteilungsfunktion Sind $(X_i)1 \leq i \leq k$ exponentialverteilte, unabhängige Zufallsvariablen, dann gilt für die Summe:

$$F_{X_i+\cdots+x_k}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(ax)^i}{i!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi_{X_i+\cdots+x_k}(x) = \begin{cases} a^k \frac{k^{k-1}}{(k-1)!} e^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeit Beschreibt für $\lambda = ax$ die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitintervall $[0, x]$ genau k Ereignisse eintreten, wenn die Zeit zwischen den Ereignissen exponentialverteilt ist mit der Dichte ae^{-ax} (λ = Häufigheit oder Rate, in der Ereignisse auftreten).

$$P_\lambda(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Erwartungswert

$$E(X) = \lambda$$

Varianz

$$\mathrm{var}(X) = \lambda$$

5.2.4 Poissonverteilung als Approximation für die Binomialverteilung

- Zufallsvariable X ist binomialverteilt
- Ist n bei der Binomialverteilung gross, ist diese nicht durchführbar (zulange Rechenzeit).
- Ist X annähernd normalverteilt, gilt: $E(X) = \mu = np$ und $\mathrm{var}(X) = \sigma^2 = np(1-p)$

Verteilfunktion:

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Poissonverteilung zum Parameter λ:

$$P_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

6 Schätzen

6.1 Begriffe

Schätzer Formel $\hat{\vartheta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für einen Parameter wie $\mu, \sigma^2, n, p, \lambda$.

Stichprobe der Zufallsvariabeln X, wenn die Zufallsvariabeln X_i unabhängig und identisch zu X verteilt sind.

6.2 Qualitätskriterien für Schätzer

Konsistente Schätzer Unendliche Stichproben ergeben den exakten Parameterwert (fast immer erfüllt).

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta(X_1, \ldots, X_n)$$

Erwartungstreue Schätzer Im Mittel richtig, auch bei kleinen n.

$$E(\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n)) = \vartheta$$

6.3 Schätzer finden

Likelihood-Funktion

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_n)$$

6.4 Bekannte Schätzer

Stichprobenmittelwert Der Schätzer für den Stichprobenmittelwert der Stichproben $X_1, \ldots, X_n$ heisst:

$$\hat{X} = \hat{\mu}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Stichprobenvarianz Der Schätzer für die Stichprobenvarianz der Stichproben $X_1, \ldots, X_n$ heisst:

$$S^2 = \hat{\sigma^2}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum {x_i}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^2\right)$$

Länge eines Intervalls Ist X_i eine Stichprobe einer auf dem Intervall $[0, \vartheta]$ gleichverteilten Zufallsvariable X, dann ist folgende Formel ein erwartungstreuer Schätzer für die Intervallänge ϑ:

$$\hat{\vartheta} = \frac{n+1}{n} \max(X_1, \ldots, X_n)$$

Parameter λ einer Poissonverteilung Der Schätzer für den Parameter λ einer Poissonverteilung ist:

$$\lambda(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Parameter p einer Binomialverteilung Der Schätzer für den Parameter p einer Binomialkoeffizient mit den bekannten Parametern m ist:

$$p(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

7 Hypothesentests - Wie wissen wir, das etwas wahr ist?

7.1 Aussagen

- Aussagen müssen falsifizierbar sein
- Positive Aussagen brauchen einen Beweis
- Negative Aussagen können nicht bewiesen werden
- Ausgangsposition ist ”wir akzeptieren nichts“
- Aussagen werden provisorisch akzeptier

7.2 Begriffe

- Nullhypothese: Ausgangsposition
- Hypothese: Positive falsifizierbare Aussage
  - Falsifizierbar: Messgrösse, die entweder wahr oder falsch ist

7.3 Testen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (Diskret)

7.3.1 χ^2-Test

- Nullhypothese: ”Gleichviele orange wie rote Bonbons“
- Hypothese: “Mehr orange als rote Bonbons“

Diskrepanz D (Abweichung von der Nullhypothese) berechnen:

$$D = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

Mit Hilfe dieser Tabelle:

Mögliche Werte	Wahrscheinlichkeit (p_i)	Anzahl Ereignisse (n_i)	np_i	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$
Gelb	0.25	11	15.75	4.75	1.432
Orange	0.25	23	15.75	7.25	3.34
Rot	0.25	10	15.75	5.75	2.09
Grün	0.25	19	15.75	3.25	0.67
Total	1	63 = n	15.75		D

Die Diskrepanz D ist für genügend grosse n annhährend χ^2 verteilt mit k Freiheitsgraden ($k =$ Anzahl Ausgänge -1).

Ist $D < D_{\text{Krit}}$, gibt es keinen Grund an der Nullhypothese zu zweifeln.

Einschränkungen:

- Bei wenigen Testdaten nicht anwendbar
- Ist p_i klein, sind sehr viele Beobachtungen nötig
- Faustregel: Jedes Intervall sollte mindestens 5 Einträge haben: $n_i \geq 5$

7.4 Testen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (Stetig)

7.4.1 Kolmogoroff-Smirnov-Test

- Nullhypothese: Daten sind gemäss der Verteilungsfunktion F verteilt.
- Hypothese: "Das ist nicht so."
- Idee: Unterschied zwischen der Verteilfunktion F und der gemessenen Verteilfunktion $F_{\text{Empirisch}}$ messen.
- Gesucht: Grösste Abweichung zwischen F und $F_{\text{Empirisch}}$

$$F_{\text{Empirisch}}(x) = \frac{|\{x_i | X_i \leq x\}|}{n}$$

Berechnung mit Tabelle (Die x_j Werte müssen aufsteigend sortiert sein!):

j	x_j	$F(x_j)$	$\frac{j}{n} - F(x_i)$	$F(x_j) - \frac{j-1}{n}$
1				
2				
$\vdots$				
n				
			max(...)	max(...)

$$K_n^+ = \sqrt{n} \cdot \max_{-\infty<x<\infty} \left(\frac{j}{n} - F(x_j) \right), \qquad K_n^- = \sqrt{n} \cdot \max_{-\infty<x<\infty} \left(F(x_j) - \frac{j-1}{n} \right)$$

Der kritische Wert K_{krit} kann man aus der Tabelle auslesen. Ist $k_{\text{krit}} > K^{\pm}$, ist die Nullhypothese falsch.

Wie ist die Verteilung von $F(X)$?

$$F_{F(X)}(X) = P(F(X) \leq x) = P(X \leq F^{-1}(x)) = F_X(F^{-1}(x)) = x$$

7.4.2 t-Test

- Nullhypothese: Zwischen zwei Messreihen gibt es kein Unterschied (Messreihen sind normalverteilt).
- Hypothese: Es gibt einen Unterschied.
- Nützlich, wenn beide Messreihen grosse Unterschiede haben (Varianz ist gross)
- Anzahl Messungen für X: n und Anzahl Messungen für Y: m
- Zwei Mittelwerte der Messreihe X unx Y: $\overline{X} = \mu_x$ und $\overline{Y} = \mu_y$
- Varianz von X: ${S_X}^2 = \text{var}(X)$ und Varianz von Y: $d{S_Y}^2 = \text{var}(Y)$

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n-1){S_X}^2 + (m-1){S_Y}^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

T ist t-Verteilt (vgl. Tabelle). Man legt ein α fest und berechnet den kritischen Wert. Ist $t > t_{krit}$, verwirft man die Nullhypothese.

8 Filter

8.1 Kalman-Filter

- Anwendung: GPS-Empfänger, Mondflug, Scheitelbestimmung einer Raketenbahn

9 Anhang

9.1 Summenformeln

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

9.2 Tabellen

Die Tabellen wurden aus dem Skript der Vorlesung von Herr Müller übernommen und ergänzt.

9.2.1 Quantilen der Normalverteilung

- Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung: $F(x) = p$

p	x	p	x
0.75	0.6745	0.25	-0.6745
0.8	0.8416	0.2	-0.8416
0.9	1.2816	0.1	-1.2816
0.95	1.6449	0.05	-1.6449
0.975	1.9600	0.025	-1.9510
0.99	2.3263	0.01	-2.3263
0.995	2.5758	0.005	-2.5758
0.999	3.0902	0.001	-3.0902
0.9995	3.2905	0.0005	-3.2905

- Muss Standardisiert sein: Mit $E(X) = 0$ und var $= 1$
- In R: `qnorm(p)`
- $1 - p = -x$

9.2.2 Verteilungsfunktion der Normalverteilung

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

- In `R`: `pnorm(x)`

9.2.3 Quantilen der χ^2-Verteilung

k	$p = 0.01$	$p = 0.05$	$p = 0.1$	$p = 0.25$	$p = 0.5$	$p = 0.75$	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	6.635
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	9.210
3	0.115	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	11.345
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	13.277
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	15.086
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	16.812
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	18.475
8	1.646	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	20.090
9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	21.666
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	23.209
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.701	17.275	19.675	24.725
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.845	18.549	21.026	26.217
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.984	19.812	22.362	27.688
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.117	21.064	23.685	29.141
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.245	22.307	24.996	30.578
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.369	23.542	26.296	32.000
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.489	24.769	27.587	33.409
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.605	25.989	28.869	34.805
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.718	27.204	30.144	36.191
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.828	28.412	31.410	37.566
21	8.897	11.591	13.240	16.344	20.337	24.935	29.615	32.671	38.932
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.039	30.813	33.924	40.289
23	10.196	13.091	14.848	18.137	22.337	27.141	32.007	35.172	41.638
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.241	33.196	36.415	42.980
25	11.524	14.611	16.473	19.939	24.337	29.339	34.382	37.652	44.314
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.435	35.563	38.885	45.642
27	12.879	16.151	18.114	21.749	26.336	31.528	36.741	40.113	46.963
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.620	37.916	41.337	48.278
29	14.256	17.708	19.768	23.567	28.336	33.711	39.087	42.557	49.588
30	14.953	18.493	20.599	24.478	29.336	34.800	40.256	43.773	50.892
50	29.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.334	63.167	67.505	76.154
100	70.065	77.929	82.358	90.133	99.334	109.141	118.498	124.342	135.807
500	429.388	449.147	459.926	478.323	499.333	520.950	540.930	553.127	576.493
1000	898.912	927.594	943.133	969.484	999.333	1029.790	1057.724	1074.679	1106.969

- k = Freiheitsgrade = Anzahl Ausgänge - 1
- $p = 1 - \alpha$
- Wenn nichts anderes angegeben: $\alpha = 0.05 \Rightarrow p = 0.95$ wählen.

9.2.4 Quantilen für den Kolmogorov-Smirnov-Test

n	$p = 0.01$	$p = 0.05$	$p = 0.1$	$p = 0.25$	$p = 0.5$	$p = 0.75$	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
1	0.01000	0.05000	0.10000	0.25000	0.50000	0.75000	0.90000	0.95000	0.99000
2	0.01400	0.06749	0.12955	0.29289	0.51764	0.70711	0.96700	1.09799	1.27279
3	0.01699	0.07919	0.14714	0.31117	0.51469	0.75394	0.97828	1.10166	1.35889
4	0.01943	0.08789	0.15899	0.32023	0.51104	0.76419	0.98531	1.13043	1.37774
5	0.02152	0.09471	0.16750	0.32490	0.52449	0.76741	0.99948	1.13916	1.40242
6	0.02336	0.10022	0.17385	0.32717	0.53193	0.77028	1.00520	1.14634	1.41435
7	0.02501	0.10479	0.17873	0.32804	0.53635	0.77552	1.00929	1.15373	1.42457
8	0.02650	0.10863	0.18256	0.32802	0.53916	0.77971	1.01346	1.15859	1.43272
9	0.02786	0.11191	0.18560	0.32745	0.54109	0.78246	1.01731	1.16239	1.43878
10	0.02912	0.11473	0.18803	0.32975	0.54258	0.78454	1.02016	1.16582	1.44397
11	0.03028	0.11718	0.19000	0.33304	0.54390	0.78633	1.02249	1.16885	1.44837
12	0.03137	0.11933	0.19160	0.33570	0.54527	0.78802	1.02458	1.17139	1.45207
13	0.03239	0.12123	0.19291	0.33789	0.54682	0.78966	1.02649	1.17357	1.45527
14	0.03334	0.12290	0.19396	0.33970	0.54856	0.79122	1.02823	1.17552	1.45810
15	0.03424	0.12439	0.19482	0.34122	0.55002	0.79259	1.02977	1.17728	1.46060
16	0.03509	0.12573	0.19552	0.34250	0.55123	0.79377	1.03113	1.17888	1.46283
17	0.03589	0.12692	0.19607	0.34360	0.55228	0.79482	1.03237	1.18032	1.46483
18	0.03665	0.12799	0.19650	0.34454	0.55319	0.79578	1.03351	1.18162	1.46664
19	0.03738	0.12895	0.19684	0.34535	0.55400	0.79667	1.03457	1.18282	1.46830
20	0.03807	0.12982	0.19709	0.34607	0.55475	0.79752	1.03555	1.18392	1.46981
30	0.04354	0.13510	0.20063	0.35087	0.56047	0.80362	1.04243	1.19164	1.48009
50	0.05005	0.13755	0.20794	0.35713	0.56644	0.80988	1.04933	1.19921	1.48969
100	0.05698	0.14472	0.21370	0.36331	0.57269	0.81634	1.05627	1.20666	1.49864
200	0.06049	0.14887	0.21816	0.36784	0.57725	0.82099	1.06117	1.21180	1.50458

- Werte entsprechen k_{Krint}
- $p = 1 - \alpha$

9.2.5 Quantilen der t-Verteilung

k	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.8165	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.6901	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.6858	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
50	0.6794	0.8489	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
100	0.6770	0.8452	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
500	0.6750	0.8423	1.2832	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857
10^3	0.6747	0.8420	1.2824	1.6464	1.9623	2.3301	2.5808
10^4	0.6745	0.8417	1.2816	1.6450	1.9602	2.3267	2.5763
10^5	0.6745	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5759
10^6	0.6745	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5758

- Freiheitsgrade: $k = n + m - 2$